

CAPITOLO 7

MECCANICA QUANTISTICA

"L'idea che un elettrone esposto a radiazione possa scegliere liberamente l'istante e la direzione in cui spiccare il salto è per me intollerabile. Se così fosse, preferirei fare il ciabattino, o magari il biscazziere, anziché il fisico"

A. Einstein a M. Born, 1924

"... questa relazione di incertezza specifica i limiti entro cui si può applicare la descrizione di particella. Ogni utilizzo delle parole "posizione" e "velocità" con un'accuratezza che eccede quella data dall'equazione ... è senza significato, come l'utilizzo di parole il cui significato non è definito"

W. Heisenberg, 1930

Principi della Meccanica Quantistica à la Copenaghen (1927)

(ridotti e semplificati)

- Lo stato di un sistema è dato assegnando la funzione d'onda complessa $\psi(r, t)$ che contiene TUTTA l'informazione relativa al sistema.
- La funzione d'onda $\psi(r, t)$ è un'ampiezza di probabilità, non può essere misurata direttamente.
- Il modulo quadro della funzione d'onda permette di calcolare la probabilità di trovare il sistema nella posizione r , al tempo t : $P(r, t) = |\psi(r, t)|^2$.
- L'evoluzione temporale di un sistema si ha risolvendo l'equazione di Schrödinger: $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$ dove H è una funzione, legata all'energia totale del sistema, che agisce sulla funzione d'onda ψ .

principio di Indeterminazione di Heisenberg (1927-1930)

versione soft (a disturbo)

- Alcune coppie di grandezze microscopiche non possono essere misurate contemporaneamente con una precisione arbitraria, perché l'azione della misura cambia il loro stato in modo non prevedibile.

versione hard (intrinseca)

- Alcune coppie di grandezze microscopiche non possono essere misurate contemporaneamente con una precisione arbitraria, perché, secondo la teoria, non possiedono contemporaneamente valori fisici definiti.

principio di esclusione di Pauli (1925)

- Due fermioni* identici non possono stare nello stesso stato individuale.

* Un fermione è una particella con spin semintero.

7.1. INTRODUZIONE

Riprendiamo l'elenco delle evidenze sperimentali che agli inizi del '900 non trovavano spiegazioni nell'ambito della fisica classica. Quello che segue è lo stesso elenco del § 5.1. Ora però, con il contributo di Einstein, hanno trovato una soluzione i primi quattro punti, o tramite la RS o tramite la RG. Gli altri punti troveranno una spiegazione con la Meccanica Quantistica e le teorie cosmologiche successive.

Problemi risolti tramite la Relatività Speciale (RS) o tramite la Relatività Generale (RG):

- ❖ La velocità della luce nel vuoto: sembrava che non si sommasse secondo le regole della fisica classica scritte per la somma di velocità in diversi SdR. – **RS**.
- ❖ Il comportamento di oggetti con cariche elettriche in moto con velocità costante rispetto ad altri oggetti con correnti elettriche microscopiche. Lo stesso fenomeno sembrava dovesse essere descritto da formule differenti a seconda del punto di vista in sistemi inerziali: andava contro la relatività galileiana. **RS**.
- ❖ L'interazione gravitazionale, così come descritta dalla legge di gravitazione universale di Newton, sembra trasmettersi istantaneamente. Come è possibile? **RG**.
- ❖ Il calcolo dell'orbita di Mercurio, tenendo conto delle interazioni gravitazionali con il Sole e tutti gli altri pianeti, dà risultati differenti da ciò che si osserva, ma le misure sono molto precise ed affidabili. Perché? **RG**.

Problemi da risolvere:

- ❖ Il colore del cielo: è nero di notte e azzurro di giorno, perché? (Keplero 1601, Olbers 1826).
- ❖ Il colore degli oggetti in funzione della temperatura: oggetti scaldati ad alta temperatura hanno colori diversi a seconda della temperatura, indipendentemente dal tipo di materiale. Perché?
- ❖ La quantità di radiazione elettromagnetica, che esce da un corpo nero¹ (~ un forno caldo): la teoria prevedeva che questa energia fosse infinita, ovviamente non era possibile.
- ❖ L'elettrone ruota intorno al nucleo senza caderci dentro: secondo l'elettromagnetismo classico un elettrone che ruota dovrebbe irradiare energia, quindi perdere energia e cadere dentro al nucleo dopo un tempo bravissimo, questo non succede. Perché?
- ❖ Le proprietà assolutamente costanti degli elementi: TUTTI gli atomi dello stesso tipo – Ferro, Calcio, Rame...- hanno esattamente le stesse proprietà che sono costanti nel tempo. Perché?
- ❖ Le differenze di comportamento fra gli elementi: 1 elettrone in meno fa molta più differenza che molti elettroni in meno: $Xe^{54} \neq I^{53}$; ma $Xe^{54} \cong Kr^{36}$. Perché?

7.1.1. La meccanica quantistica

¹ Un corpo nero è un oggetto ideale, in equilibrio ad una certa temperatura, che assorbe tutta la radiazione elettromagnetica incidente senza rifletterla. Si può approssimare con un forno caldo con un piccolo foro.

La Meccanica Quantistica (d'ora in poi MQ) e la Relatività² sono due teorie, entrambe rivoluzionarie, che hanno cambiato radicalmente la nostra visione del mondo. Tuttavia c'è una differenza fondamentale fra le due.

La Relatività modifica la nostra visione dello spazio-tempo. Può sembrarci strano che i tempi e gli spazi siano relativi, ma quello che succede non è assurdo: abbiamo oggetti più corti, tempi dilatati, ma la loro misurazione non è «impossibile».

La MQ, invece, introduce delle spiegazioni talvolta «incomprensibili», la sua logica non è quella a cui siamo abituati. Si tratta di una nuova rappresentazione degli elementi della realtà microscopica che talvolta contrastano con il senso comune. I fisici spesso incontrano problemi quando cercano di interpretare i risultati della meccanica quantistica: spesso si è obbligati ad accettare le sue previsioni, senza doverle necessariamente capire fino in fondo.

Questa è la ragione per cui molti fisici non l'hanno accettata, o la rifiutano in toto, e cercano, ancora oggi, teorie alternative. Nel paragrafo che segue vedremo, tanto per fare qualche esempio, cosa hanno detto della MQ una serie di fisici illustri. È da notare che molti di questi hanno preso il premio Nobel per le loro ricerche sulla MQ.

7.1.2. Dichiarazioni e affermazioni varie sulla QM

- Sulla quantizzazione delle orbite atomiche (Bohr, 1911)
- Se questa è la via per raggiungere la meta devo rinunciare a fare fisica – Paul Ehrenfest, in (Mehra & Rechenberg, 1982)
- Alla luce di questi fatti ci si potrebbe domandare se la fisica sia ancora la più solida tra le scienze naturali - Max Planck, 1923; in (Pais, 1995).
- L'idea che un elettrone esposto a radiazione possa scegliere *liberamente* l'istante e la direzione in cui spiccare il salto è per me intollerabile. Se così fosse, preferirei fare il ciabattino, o magari il biscaggiere, anziché il fisico - Lettera di A. Einstein a Max Born, 29 aprile 1924, in (Einstein & Born, 1973).
- [...] non sono competente a tenere questa relazione [...] anche perché non accetto il punto di vista puramente statistico su cui si basano le nuove teorie - A. Einstein, in (Pais, 1986).
- Più la teoria dei quanti ha successo, più sembra una sciocchezza - A. Einstein, lettera a Heinrich Zangger, 20 maggio 1912.
- Se questi dannati salti quantici dovessero esistere, rimpiangerò di essermi occupato di meccanica quantistica— Erwin Schrödinger, in (Heisenberg, Fisica e oltre, 1984).
- [...] non vorrei lasciarmi indurre ad abbandonare la causalità rigorosa senza aver prima lottato in modo assai diverso da come s'è fatto finora - Lettera di A. Einstein a Max Born, 29 aprile 1924, in (Einstein & Born, 1973).
- Situazione inaccettabile da tutti coloro che non sono "disponibili ad abbandonare senza combattere una causalità rigorosa" (A. Einstein.?).
- Non mi piace, e mi spiace di averci avuto a che fare (attribuita a Erwin Schrödinger).
- Quanto più penso agli aspetti fisici della teoria di Schrödinger, tanto più repellenti li trovo. W. Heisenberg a Pauli, 8 giugno 1926, in (Cassidy, 1996, p. 236)
- È indubitabile, a mio parere, che questa teoria contenga un frammento della verità ultima - (Einstein A., 1931)
- Infatti chi non rimane sconvolto, quando si imbatte per la prima volta nella teoria quantistica, non può assolutamente averla compresa - Niels Bohr, cit. in (Kumar, 2012, p. 9).

² Come abbiamo visto nei capitoli precedenti le teorie della relatività scritte da Einstein sono due – quella "speciale" del 1905 e quella "generale" del 1916. Qui e nel seguito si utilizzerà il termine "teoria/e della relatività" per indicare entrambe le teorie, se non specificato diversamente.

- Penso si possa tranquillamente affermare che nessuno capisce la meccanica quantistica - R. Feynman, in (Kumar, 2012, p. 340).

Quindi anche nella comunità scientifica la struttura della MQ poneva dei problemi a molti fisici, e in parte li pone tutt'ora. Tuttavia c'è un aspetto che domina, al momento, su tutte le obiezioni: la MQ è la teoria più precisa che abbiamo per descrivere il nostro universo, e, insieme alla RG, la più completa.

Per dare un'idea della precisione riportiamo due valori di una certa grandezza che può essere misurata in laboratorio e calcolata dalla teoria con grande precisione: il momento magnetico dell'elettrone; questa grandezza, dovrebbe essere uguale ad 1 in unità del cosiddetto magnetone di Bohr³. Tuttavia i dati risultano leggermente differenti, questa differenza, che chiameremo **a**, può essere calcolata utilizzando il modello completo della MQ. Ecco i risultati degli esperimenti e del calcolo teorico

- L'Esperimento (Hanneke, 2011): $a_e^{\text{EXP}} = 0,001\ 159\ 652\ 180\ 73 \pm 0,000\ 000\ 000\ 000\ 28$

- La Teoria (Aoyama, 2015): $a_e^{\text{TEO}} = 0,001\ 159\ 652\ 181\ 64 \pm 0,000\ 000\ 000\ 000\ 76$

Questo vuol dire che la teoria prevede ciò che poi viene misurato con una precisione relativa di circa $6 \cdot 10^{-10}$. Tanto per dare un'idea sarebbe come avere una teoria che calcola la distanza in linea d'aria fra la cima dell'obelisco in Piazza del Popolo a Roma e la punta della Madonnina a Milano, che è di circa 500 km, con la precisione di 0,3 mm (3 decimi di mm!), e di poter controllare che la previsione è in accordo con la misura fatta.

7.1.3. La nascita e i primi passi della MQ: Planck, Einstein, Bohr, de Broglie

Max Planck – 1900

La MQ nasce il 14 dicembre 1900 quando Karl Ernst Ludwig Marx (Max) Planck (1858-1947) affronta e risolve il problema dell'emissione di energia *infinita* da parte di un corpo nero presentando una relazione alla Società di Fisica Tedesca (Planck, 1900).

Il problema è questo: supponiamo di avere una scatola vuota cioè un contenitore chiuso con le pareti ad una certa temperatura T, uniforme, quindi in contatto con una sorgente a temperatura T. Le cariche elettriche presenti nelle pareti si muoveranno a causa dell'agitazione termica, quindi emetteranno una radiazione e.m. che riempirà la cavità. A loro volta le onde e.m. presenti nella cavità, urtando contro le pareti della scatola, trasferiranno energia e.m. alle pareti. All'equilibrio si raggiungerà una situazione in cui l'energia trasferita ogni secondo dalle pareti al campo e.m. presente nella scatola sarà uguale all'energia trasferita ogni secondo dal campo e.m. alle pareti. Quindi si potrà calcolare l'espressione del cosiddetto spettro e.m. della radiazione all'interno della scatola, che sarà una funzione della frequenza delle onde e.m. e della temperatura T delle pareti della scatola. Questa funzione era stata calcolata, era la cosiddetta legge di Rayleigh-Jeans. Facendo ora un piccolo foro su una delle pareti si può calcolare l'energia e.m. che esce dal foro ogni secondo, per unità di superficie. Il grosso problema di questa espressione è che, eseguendo il calcolo su tutte le frequenze possibili, si ha come risultato il grafico A della figura 7.1.

^{3 3} L'unità utilizzata usualmente è il magnetone di Bohr: $m_B \stackrel{\text{def}}{=} e\hbar/2m_e = 9,27400948(80) \cdot 10^{-24} \text{ J/T}$

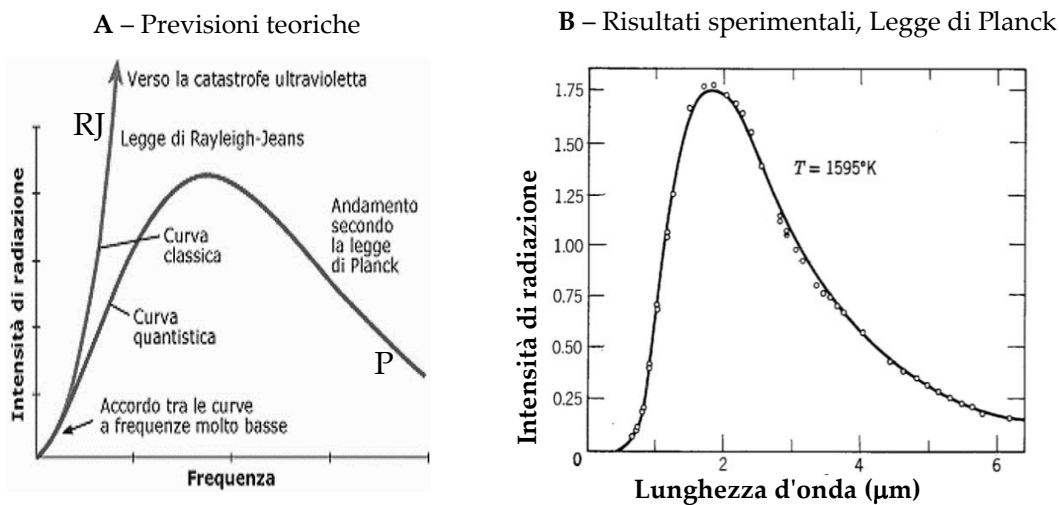


Fig. 7.1 Andamento dell'intensità della radiazione che uscirebbe da un contenitore ad una certa temperatura T in funzione della frequenza f dell'onda e.m. **A)** Le previsioni teoriche – la legge di Rayleigh-Jeans (RJ) e la previsione secondo l'ipotesi di Planck (P). **B)** Il grafico originale dell'articolo di Coblenz, 1916 con i punti sperimentali sovrapposti alla legge ipotizzata da Planck. Nota: il grafico B è in funzione della lunghezza d'onda λ , mentre il grafico A è in funzione della frequenza f , dove $c = \lambda \cdot f$. Questo non cambia il punto concettuale, entrambe le curve partono da zero nell'origine ed arrivano a zero all'infinito.

L'intensità totale è proporzionale all'area sotto la curva; ma la curva tende all'infinito, quindi anche l'intensità della luce emessa risulta infinita. Questo ovviamente non è vero. D'altronde la curva descrive correttamente i dati sperimentali per le basse frequenze, quindi non può essere completamente errata. Inoltre viene derivata dalle equazioni di Maxwell che si sono dimostrate corrette in moltissime applicazioni. È un bel problema a cui per un bel po' nessuno sa trovare una soluzione. Il punto critico è che nella formula deve apparire come variabile la Temperatura, quindi la termodinamica, e combinare formule dell'e.m. (quindi dei campi e.m.) con quelle della termodinamica (il mondo dell'irreversibile) non è una questione semplice.

Planck risolve il problema con una ipotesi ad hoc: per ogni frequenza l'energia fra radiazione (luce) e materia deve essere **scambiata** per multipli interi di una grandezza costante: il *quanto* di energia. Il quanto di energia, per un'onda di frequenza f , vale $E = hf$; $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$.

Da dove viene questa assunzione? In realtà Planck inizia individuando il problema nel come scrivere l'entropia legata alla radiazione e.m. ed arrivando in seguito all'ipotesi della quantizzazione dell'energia e.m. scambiata con le pareti. Scrive Planck (Planck, 1900):

"...alla fine iniziai a costruire espressioni per l'entropia completamente arbitrarie che... sembrano soddisfare quasi completamente tutti i requisiti della termodinamica e della teoria elettromagnetica. Sono stato particolarmente attratto da una delle espressioni così costruite... che, per quanto si può giudicare al momento, interpola i dati sperimentali sinora pubblicati con la stessa precisione delle migliori equazioni proposte per lo spettro [della radiazione] ... Mi permetto pertanto di attirare la vostra attenzione su questa nuova formula che io considero la più semplice possibile dal punto di vista della teoria elettromagnetica della radiazione..."

...Se E [l'energia del campo e.m.] è considerata come una quantità divisibile in modo continuo, questa distribuzione è possibile in un numero infinito di modi. Tuttavia, noi supponiamo - questo è il punto essenziale di tutto il procedimento - che E sia composta di un numero ben definito di parti uguali ed useremo d'ora innanzi la costante della natura $h = 6.55 \times 10^{-27} \text{ erg sec}$. Questa costante, moltiplicata per la frequenza ν dei risonatori ci dà l'elemento di energia ϵ "

Quindi l'espressione in cui compare la quantizzazione dell'energia nasce dal tentativo di avere una formula matematica che fornisca delle previsioni accettabili. Planck non spiega perché funziona...ma

funziona! Le previsioni teoriche descrivono perfettamente i dati sperimentali – cfr. il grafico B in fig. 7.1.

Albert Einstein, 1905

Albert Einstein (1879-1955) il 17 marzo 1905 risolve il problema dell'effetto fotoelettrico (Einstein A., *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt*, 1905a): se mandiamo luce su di un metallo possiamo «strappare» elettroni al metallo, ma solo se la luce ha una frequenza minima.

La descrizione classica dell'esperimento è questa: dentro ad ogni metallo ci sono degli elettroni liberi di muoversi. Per strappare questi elettroni al metallo serve una certa energia di soglia E_s che dipende dal metallo. Se inviamo della luce (onde e.m.) sul metallo questa interagirà con gli elettroni cedendo l'energia associata alla sua intensità. Questa intensità, secondo le leggi dell'e.m., è proporzionale al quadrato dell'ampiezza dell'onda. Quindi se con una certa ampiezza non riusciamo ad estrarre gli elettroni dovrebbe essere sufficiente aumentare l'ampiezza e quindi l'intensità della luce incidente per arrivare a strapparne un certo numero. Questo comportamento non è verificato dall'esperienza. Quello che si trova sperimentalmente è che la chiave per strappare elettroni al metallo sta nella frequenza del segnale luminoso. Se la luce ha una frequenza inferiore ad una certa frequenza di soglia f_s non si riescono a strappare elettroni, indipendentemente dall'intensità della luce inviata sul metallo. Ma se si supera anche di poco la frequenza di soglia allora inizia il processo fotoelettrico. Si ha quindi un'emissione di elettroni strappati al metallo che risulta poi proporzionale all'ampiezza dell'onda.

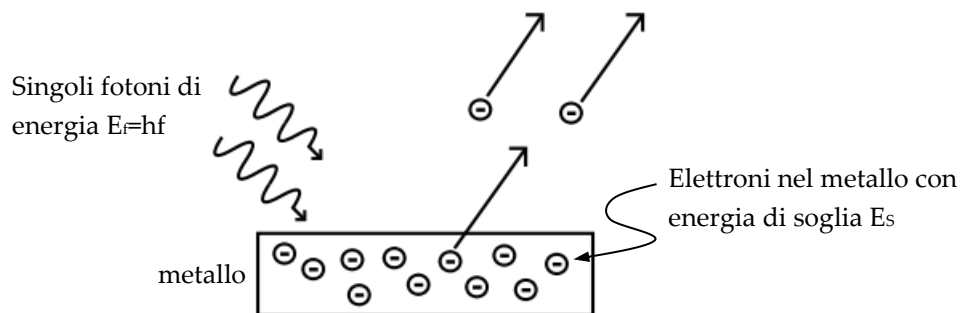


Fig. 7.2 Schema di principio dell'effetto fotoelettrico. Nel metallo sono presenti degli elettroni. Inviando luce sulla superficie metallica riesco a strappare gli elettroni al metallo, ma solo se la frequenza della luce è tale che ogni fotone abbia un'energia maggiore o uguale dell'energia di soglia E_s necessaria per estrarre gli elettroni dal metallo.

La spiegazione data da Einstein nell'articolo per cui gli verrà dato il Premio Nobel nel 1926, è questa:

L'energia della luce è **distribuita** nello spazio con discontinuità: la luce è trasportata da fotoni di energia $E = hf$. Se ho più fotoni ho più energia $E(n) = n \cdot hf$, ma ogni singolo fotone continua ad avere la stessa energia hf . Il processo dell'estrazione degli elettroni dal metallo è questo: si invia luce di una certa frequenza f sul metallo. Ogni fotone, se interagisce con un elettrone, gli può cedere al massimo l'energia hf . Se questa energia è maggiore dell'energia di soglia, se cioè $hf \geq E_s$, allora possiamo strappare l'elettrone al metallo. Se questa energia è minore non c'è niente da fare, possiamo inviare anche molti fotoni al secondo sul metallo – aumentando l'intensità della luce – ma ogni elettrone interagirà singolarmente con un elettrone, quindi nessuno di questi riuscirà a strappare l'elettrone al metallo. Le relazioni che si derivano da questa ipotesi confermano i dati sperimentali. La luce è composta di fotoni.

PROBLEMA: Ma la luce non era un'onda? Se la radiazione, cioè la luce, è quantizzata, perché non vedo tanti lampi luminosi in sequenza quando guardo una luce? Tralasciamo per il momento il problema di descrivere lo stesso oggetto come un'onda oppure come una quantità discreta – problema

che affronteremo nei prossimi paragrafi. Il problema di non vedere i singoli fotoni come singoli lampi di luce è lo stesso per cui quando raccolgo un po' di acqua con la mano non vedo le singole molecole di acqua. Sono troppe e troppo piccole. Analogamente l'energia del singolo quanto di luce – il fotone – è molto piccola. Supponiamo ad esempio di avere una lampadina molto debole che emette una luce rossa con la potenza di 1 Watt. Questo vuol dire che ogni secondo viene emessa un'energia di 1 Joule. E supponiamo che tutta questa energia arrivi dentro il mio occhio. L'energia di Joule in fotoni "rossi" corrisponde ad un numero di fotoni $N=1 \text{ Joule}/(\text{Energia di 1 fotone "rosso"})= 1/hf= 1/(6,6 \cdot 10^{-34} \cdot 450 \cdot 10^{12}) \cong 3 \cdot 10^{18}$ fotoni! Sono tre miliardi di miliardi di fotoni al secondo. Per questo non vediamo i singoli fotoni.

Niels Bohr, 1913

Niels Henrik David Bohr (1885-1962) nel 1913 propone alcune ipotesi per spiegare la stabilità degli atomi e le righe spettrali. La sua teoria si basa su tre postulati:

1) In un atomo, quindi in uno stato legato, gli elettroni possono muoversi con le leggi della fisica classica solo su orbite chiuse che soddisfino la condizione che il momento angolare dell'elettrone sia un numero intero di volte la costante di Planck diviso per 2π . La condizione di quantizzazione è quindi.

$$L = mvr = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar, \text{ dove si è utilizzato il simbolo } \hbar = h/2\pi, \text{ chiamato "accatagliato"}$$

2) Un elettrone che ruota su di un'orbita definita dalla relazione esposta nel punto 1) non emette radiazione, quindi la sua energia E rimane costante.

3) Un elettrone che ruota su una delle orbite di cui sopra può assorbire o emettere energia elettromagnetica solo se salta da un'orbita all'altra. In questo caso la frequenza f dell'onda e.m. scambiata soddisfa la relazione:

$$hf = E_2 - E_1$$

Deve essere chiaro che queste tre sono solo delle ipotesi, che oltretutto sembrano abbastanza incoerenti. Bohr utilizza alcune formule della fisica classica, la forza di Coulomb che si esercita fra le cariche, le relazioni fra momento angolare, l'energia cinetica e l'energia potenziale... mentre ne rigetta altre imponendo delle condizioni che sono in contrasto con la teoria classica: gli elettroni che si trovano su di un'orbita hanno un'accelerazione diversa da zero, ma non emettono energia.

Eppure la "teoria" funziona. Svolgendo alcuni semplici calcoli si possono calcolare i raggi su cui orbitano gli elettroni, le energie di ogni elettrone per ogni singola orbita e si possono calcolare le lunghezze d'onda delle righe di emissione⁴ degli atomi investiti da radiazione e.m.

Le lunghezze d'onda delle righe osservate sperimentalmente erano descritte dalla formula empirica, trovata nel 1888 da J. Rydberg: $\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$, dove $n = 3, 4, 5$. Queste lunghezze d'onda, per piccoli valori di n , sono descritte correttamente dalle ipotesi di Bohr.

Quindi il modello di Bohr descrive correttamente i valori delle lunghezze d'onda relative alle righe emesse dagli atomi, spiega perché gli atomi sono stabili, spiega perché sono tutti identici. Ma resta il problema: perché l'elettrone si comporta così? A questo Bohr non dà risposta. Non si sa come, ma funziona.

⁴ Con *riga di emissione* si intende la frequenza corrispondente alla luce emessa, che nel laboratorio si vede come una riga colorata in una certa posizione che ne identifica la frequenza.

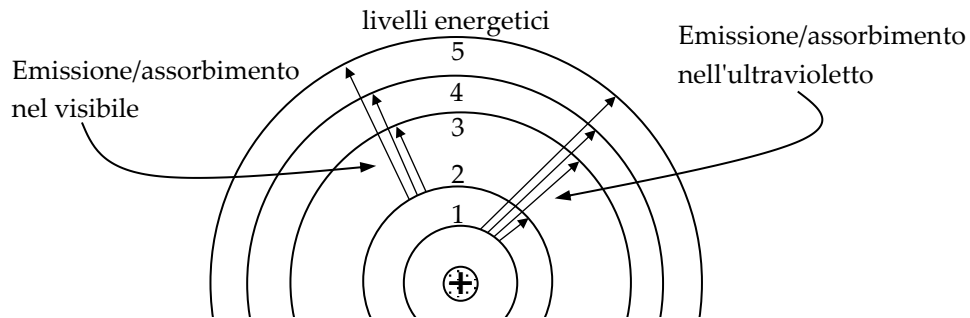


Fig. 7.3 Le righe di emissione/assorbimento di un atomo in cui gli elettroni saltano da un'orbita all'altra corrispondono alle frequenze per cui vale la relazione $hf = E_i - E_j$ dove E_i ed E_j sono le Energie dei livelli di partenza/arrivo. In figura sono mostrate alcune delle transizioni relative alle prime due serie caratteristiche di ogni atomo che corrispondono a scambi con il primo livello energetico (luce ultravioletta) o con il secondo livello (luce nel visibile).

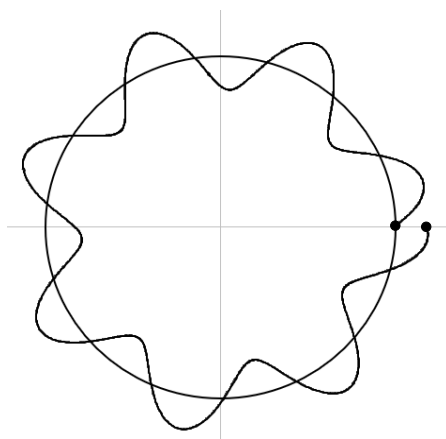
Louis de Broglie, 1924

Nella sua tesi di dottorato presentata nel 1924 Louis-Victor Pierre Raymond (Louis) de Broglie (1892-1987) propone un'ipotesi teorica rivoluzionaria: ad ogni particella di massa m e velocità v è «associata» un'onda di lunghezza d'onda λ :

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

Quindi ogni particella si comporta «anche» come un'onda. Al momento non è chiaro cosa voglia dire, quello che conta è che per descrivere le proprietà della particella, per esempio dell'elettrone che ruota intorno al nucleo, dovremo utilizzare le leggi della fisica che si riferiscono all'elettrone come ad una particella puntiforme – per esempio per calcolare la forza che si esercita fra l'elettrone e il nucleo – e **allo stesso tempo** le leggi delle onde considerando l'onda associata di lunghezza d'onda λ .

A. La lunghezza della circonferenza NON è un multiplo intero della lunghezza d'onda con cui vibra la corda.



B. La lunghezza della circonferenza è un multiplo intero della lunghezza d'onda con cui vibra la corda.

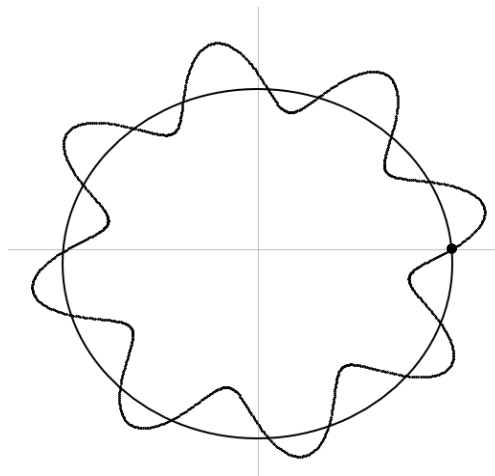


Fig. 7.4 Schema ideale di una corda chiusa ad anello che vibra su di una circonferenza media di lunghezza L . Nel caso A ho $L \neq n \lambda$: la corda non si chiude esattamente su sé stessa, l'oscillazione non può essere stazionaria. Nel caso B invece $L = 5\lambda$, la corda si chiude su sé stessa e può avere oscillazioni stazionarie. Nel disegno l'ampiezza dell'oscillazione è stata aumentata per maggiore visibilità, va considerato che in realtà l'oscillazione è molto piccola, quindi quasi coincidente con la circonferenza.

Questa ipotesi – al momento bizzarra – spiega egregiamente il modello di Bohr. Se infatti consideriamo un'onda che si trova su di una circonferenza chiusa – come se fosse l'onda associata ad una corda che vibra – allora il moto stazionario⁵ della corda non può essere un moto qualunque.

La corda, nelle sue oscillazioni, deve soddisfare le condizioni al contorno, cioè dopo un giro si deve "richiudere" con delle precise relazioni di fase per permettere alla corda di continuare ad oscillare con la stessa lunghezza d'onda. Altrimenti avremmo un'interferenza distruttiva e il moto della corda, quindi la sua oscillazione, andrebbe rapidamente a zero. [cfr. fig. 7.4].

La condizione perché esista un'onda stazionaria in una corda che vibra lungo una circonferenza di raggio medio r è quindi:

$$2\pi r = n \cdot \lambda$$

se ora sostituiamo al valore di λ quello della particella cui è associato secondo l'ipotesi di de Broglie avremo:

$$2\pi r = n \cdot \lambda = n \cdot \frac{h}{mv} \quad \text{che, riscritta, diventa:} \quad mvr = n \cdot \frac{h}{2\pi} = n \hbar$$

Siamo cioè arrivati all'ipotesi di Bohr. Questa posizione giustifica l'ipotesi della quantizzazione del momento angolare proposta da Bohr, ma introducendo una nuova ipotesi: che ad ogni particella puntiforme (per ora) sia associata un'onda delle cui caratteristiche bisogna tener conto per prevedere il comportamento della particella. Non è ancora una "spiegazione" anzi, sembra introdurre un nuovo elemento, ma vedremo come questa ipotesi sia la più vicina alla realtà del mondo microscopico.

Resta tuttavia un problema: de Broglie afferma che ad ogni particella è associata un'onda, e con questa assunzione dà una giustificazione alla quantizzazione delle orbite atomiche. Ma perché allora non la utilizziamo per descrivere il moto di un corpo molto più grande, per esempio il moto dei pianeti

⁵ Un moto stazionario è quello in cui i valori medi delle grandezze fisiche si mantengono costanti nel tempo, quindi restano uguali se non vi sono dissipazioni. Una corda ideale (senza attrito) che vibra in modo stazionario è una corda che, posta in vibrazione, continua a vibrare sempre esattamente allo stesso modo, per esempio con la stessa frequenza.

intorno al Sole – che non sembrano avere orbite quantizzate? Il problema, per il momento, è squisitamente numerico, non concettuale.

La lunghezza d'onda di de Broglie associata ad un corpo è: $\lambda = h/mv$ e gli effetti legati alle proprietà delle onde diventano osservabili quando il corpo interagisce con oggetti delle dimensioni di λ . È analogo a ciò che succede con le onde luminose. Se un raggio di luce incontra un oggetto "macroscopico", una lente ad esempio, posso utilizzare l'ottica geometrica per descriverne il comportamento, non sono costretto ad utilizzare il fatto il raggio di luce sia in realtà un'onda e.m. Ma se il raggio luminoso incontra ad esempio delle fenditure con larghezze circa della stessa lunghezza d'onda del raggio luminoso o inferiori, allora ho i fenomeni di diffrazione e di interferenza e dobbiamo utilizzare la descrizione del fascio luminoso come onda.

Ed ecco le lunghezze d'onda di alcuni oggetti appartenenti al nostro universo.

- La Terra che ruota intorno al Sole: $\lambda = \frac{h}{M_T V_T} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{6 \cdot 10^{24} \cdot 30 \cdot 10^3} \cong 4 \cdot 10^{-63} \text{ m}$
- Una palla da tennis molto veloce: $\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{60 \text{ g} \cdot 200 \text{ km/ora}} \cong 2 \cdot 10^{-34} \text{ m}$
- Un granello di polvere⁶ che fluttua nell'aria: $\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{0,5 \cdot 10^{-15} \cdot 1 \text{ cm/s}} \cong 1,3 \cdot 10^{-16} \text{ m}$

Si vede che in tutti i casi di cui sopra all'oggetto è associata una lunghezza d'onda molti ordini di grandezza inferiori alle dimensioni non solo dell'oggetto in questione, ma di qualunque particella materiale conosciuta. Qualunque effetto legato alla natura ondulatoria del sistema è quindi completamente trascurabile.

- Un elettrone (nell'atomo di H): $\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{0,9 \cdot 10^{-30} \cdot 2,3 \cdot 10^6} \cong 3,2 \cdot 10^{-10} \text{ m}$. Il raggio classico dell'atomo di idrogeno (H) è di circa $r_H \sim 1 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, la sua circonferenza è quindi di circa $3,1 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, che è dello stesso ordine di grandezza della sua lunghezza d'onda di de Broglie, è per questo che gli effetti ondulatori, per questo elettrone, diventano sensibili.

7.2. I principi della Meccanica Quantistica

Nel 1927 e negli anni seguenti Schrödinger, Heisenberg, Dirac e molti altri fisici, partendo dalle osservazioni precedenti, creano quella meravigliosa costruzione che è la Meccanica Quantistica. Formalizzata appunto nel 1927 verrà implementata e modificata negli anni successivi, mantenendo però il significato e la struttura data inizialmente dai suoi fondatori.

Ne daremo qui una versione molto semplificata, mantenendo i punti concettualmente importanti. In particolare discuteremo in dettaglio alcuni esperimenti tipici per dare un'idea di come funzioni la teoria quando viene applicata alle osservazioni fatte o che vorremmo fare.

La MQ ha la particolarità di essere stata enunciata da diversi scienziati utilizzando formalismi diversi che a prima vista sembravano completamente differenti fra di loro. In particolare negli anni fra il 1925 e il 1927 nascono due versioni della MQ: la MQ ondulatoria, creata da Schrödinger, che utilizzerà il concetto di funzione d'onda, e la MQ delle matrici, creata da Heisenberg, che utilizzerà il formalismo delle matrici. Sarà Dirac, qualche anno dopo, a mostrare l'equivalenza delle due formulazioni introducendo un'ulteriore modalità di descrizione. Qui parleremo della MQ ondulatoria, più semplice da descrivere in maniera elementare ed anche la più visualizzabile⁷.

Nella tabella 7.1 abbiamo riportato i più importanti principi della MQ confrontandoli con quelli della Meccanica Classica per avere un'idea delle maggiori differenze fra questi due approcci. Nella tabella alcune formule sono state semplificate per non appesantire troppo la trattazione aggiungendo simboli nuovi. In particolare si suppone che il sistema si possa muovere in una sola direzione (la x),

⁶ Si è considerato un granello di polvere del diametro di 1 μm e con densità di 1g/cm³.

⁷ Per una discussione introduttiva delle interpretazioni e delle teorie quantistiche viste da un punto di vista fisico/filosofico vedi il libro di Argenterii, Bassi e Pecere (Argenterii, Bassi, & Pecere, 2013)

quindi servirà una sola variabile per determinarne la posizione nello spazio.

Il cuore della MQ, nella formulazione di Schrödinger, consiste nel descrivere lo stato di un sistema, di un qualunque sistema, assegnando ad esso una certa funzione, chiamata funzione d'onda, e nel calcolare il risultato di una qualunque misura fatta sul sistema tramite operazioni algebriche fatte su questa funzione d'onda e sull'equazione di Schrödinger che ne determina l'evoluzione nel tempo.

Nei paragrafi che seguono vedremo di chiarire il significato da attribuire alla funzione d'onda e come ci si può operare per prevedere il comportamento di un qualunque sistema fisico.

I principi della Meccanica Quantistica (1927)	I principi della Fisica Classica
<p>Lo stato di un sistema è dato assegnando la sua funzione d'onda $\psi(x,t)$ che contiene TUTTA l'informazione relativa al sistema.</p> <p>La funzione d'onda è un'ampiezza di probabilità, non può essere misurata direttamente.</p>	<p>Lo stato di un sistema⁸ è dato assegnando la posizione, la velocità, il tempo, la massa, la carica... Ognuna di queste grandezze può essere misurata, in linea di principio.</p>
<p>Si ha che $P(x,t) = \psi(x,t) ^2$. Il modulo quadro della funzione d'onda permette di calcolare la probabilità di trovare il sistema nella posizione x, al tempo t⁹.</p>	<p>Se effettuo una misura (p.e. della posizione del sistema) ho un risultato deterministico x che mi esprime dove fosse il sistema nell'istante della misura.</p>
<p>L'evoluzione temporale di un sistema si ha risolvendo l'equazione di Schrödinger: $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$ dove H è una funzione, che agisce sulla funzione d'onda, legata all'energia totale del sistema.</p> <p>(L'equazione di Schrödinger è deterministica)</p>	<p>L'evoluzione temporale di un sistema si ha risolvendo il sistema di equazioni del II principio della dinamica:</p> $\bar{F} = m\bar{a} = \frac{d\bar{p}}{dt}$
<p>Il principio di indeterminazione di Heisenberg</p> <p>Alcune coppie di grandezze non possono essere misurate contemporaneamente con una precisione arbitraria. Secondo la teoria non possiedono, contemporaneamente valori fisici definiti.</p>	<p>Le grandezze che descrivono un corpo sono indipendenti e, in linea di principio, possono tutte essere misurate anche contemporaneamente, con una incertezza che dipende dall'operazione di misura.</p>
<p>Il principio di esclusione di Pauli</p> <p>- Due fermioni* identici non possono stare nello stesso stato individuale.</p>	<p>* Nota: i fermioni sono le particelle, sempre dotate di massa, che compongono la materia. Cfr. § 8.1.</p>
<p>Le forze (le interazioni) \bar{F} necessarie per scrivere l'energia del sistema (l'equazione di Schrödinger) sono quelle dovute ai campi e.m. \bar{E} e \bar{B}. In seguito verranno aggiunte le interazioni deboli (Fermi 1933) e quelle forti (Gell Mann 1953)¹⁰. Il campo gravitazionale non è inserito nella descrizione della Meccanica Quantistica.</p>	<p>Le forze (le interazioni) \bar{F} sono quelle dovute al campo gravitazionale e ai campi e.m. \bar{E} e \bar{B}.</p>

Tab. 7.1 I Principi della Meccanica Quantistica ondulatoria – un estratto semplificato – confrontati con i principi della Fisica Classica.

⁸ Per semplicità consideriamo qui un sistema semplice, una piccola sfera materiale che si può muovere in una sola direzione, la x . Se poi avessimo un sistema più complicato dovremo dare le sue dimensioni spaziali, la sua forma, la composizione chimica... Ma la sostanza non cambia.

⁹ Rigorosamente se la variabile x fosse continua dovrei parlare di una densità di probabilità $dP(x,t) = |\psi(x,t)|^2 dx$ associata alla probabilità di trovare il sistema nell'intervallo dx . Qui e in seguito trascureremo questo dettaglio formale.

¹⁰ Nel 2012 si è aggiunta un'altra interazione. Il cosiddetto campo di Higgs, che determina le masse di alcune particelle.

7.2.1. La funzione d'onda

Il primo principio della MQ afferma che la descrizione dello stato di un sistema (di una particella p.e.) è data dalla funzione d'onda $\psi(x, t)$. La funzione d'onda è una funzione complessa, quindi è formata da due parti: una parte reale e una parte immaginaria. $\psi = \psi_{Re} + i \psi_{Im}$.

La funzione d'onda, che contiene tutta l'informazione relativa al sistema, è un'ampiezza di probabilità.

Questo vuol dire che la funzione d'onda non rappresenta una grandezza fisica misurabile direttamente – come potrebbe essere ad esempio la posizione di un corpo o la frequenza a cui sta vibrando una corda – ma è una funzione matematica. Questa funzione è legata alla probabilità di ottenere un certo risultato per una qualunque misura che volessimo fare sul sistema. In particolare il modulo quadro della funzione d'onda è legato alla probabilità di trovare il sistema (la particella) in un certo intervallo di spazio e in un certo istante.

Legge di Born (Born, M., 1927)

$dP = |\psi|^2 dx$ è la probabilità di trovare la particella nell'intervallo dx se la particella viene misurata.

$|\psi|$ indica il modulo della funzione d'onda: $|\psi| = +[\psi_{Re}^2 + \psi_{Im}^2]^{1/2}$

Attenzione, questo è un punto importante: la probabilità così calcolata non è la probabilità che la particella si trovi un certo stato – che venga misurata oppure no -. Se non la misuriamo la particella *non ha una posizione definita*. La particella ha, in potenza, la probabilità di essere trovata – in seguito ad una misura – in una certa zona di spazio. E questa probabilità non è epistemica, non è quindi dovuta ad una nostra mancanza di informazione. Si tratta di una probabilità intrinseca al sistema. La probabilità classica, invece, è una probabilità epistemica legata ad una nostra mancanza di informazione su molti parametri del sistema (cfr. §3.7.1).

Se conosciamo la funzione d'onda in un certo istante quello che vorremmo sapere è come evolverà questa funzione nel tempo. Il comportamento nel tempo e nello spazio di particella di massa m , soggetta ad un potenziale $V(x, t)$ è descritto dall'equazione di Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = H\psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi(x, t) + V(x, t)\psi(x, t)$$

L'equazione di Schrödinger permette di calcolare l'espressione della $\psi(x, t)$ e la sua evoluzione nel tempo e nello spazio. Sostituisce il secondo principio della dinamica di Newton.

È importante notare che il risultato dell'equazione di Schrödinger è completamente deterministico, non è probabilistico. Quindi:

- 1) Dato un sistema e le forze che agiscono su di esso (o i campi in cui è immerso) possiamo calcolare esattamente quale sarà la funzione d'onda e la sua evoluzione nel tempo.
- 2) Data la funzione d'onda in un qualunque istante potremo calcolare (solo) la probabilità di trovare la particella di massa m in un certo punto o altre sue caratteristiche fisiche... *e più non dimandare* (Alighieri, 1321).

Vediamo ora di fare un esempio di come viene trattato un caso molto semplice dalla Meccanica Classica e dalla MQ. Consideriamo una particella (una pallina) di massa m , di estensione trascurabile, posta su di un piano orizzontale senza attrito. Supponiamo anche di trovarci sulla Terra, quindi esisterà la forza di gravità, ma questa forza, essendo diretta secondo la verticale, non avrà nessuna influenza sul moto della particella in direzione orizzontale.

- Calcolo del moto di una particella secondo la Meccanica Classica

Lanciamo la particella in una certa direzione perpendicolare alla forza di gravità (la x p.e.) con una certa velocità v_0 . Il moto della particella può essere calcolato utilizzando la seconda legge di Newton. In questo caso avremo:

$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, che, scritta lungo l'asse x , diventa: $F_x = m \cdot a_x$; ma la forza è nulla, quindi avremo: $0 = m \cdot a_x$ quindi $a_x = 0$. Questa è una equazione differenziale che, risolta, fornisce la velocità e la posizione della particella in funzione del tempo:

$$v(t) = v_0 ; \quad x(t) = v_0 \cdot t ,$$

dove abbiamo supposto che all'istante iniziale $t=0$ la particella si trovasse nell'origine, quindi in $x=0$, con velocità v_0 in direzione x .

Si tratta di un moto rettilineo uniforme. Se volessimo sapere la posizione della particella in un certo istante t^* ci basterebbe sostituire il tempo nella formula relativa e potremmo sapere/prevedere che la particella, nell'istante t^* , si troverà nel punto $x^* = v_0 \cdot t^*$.

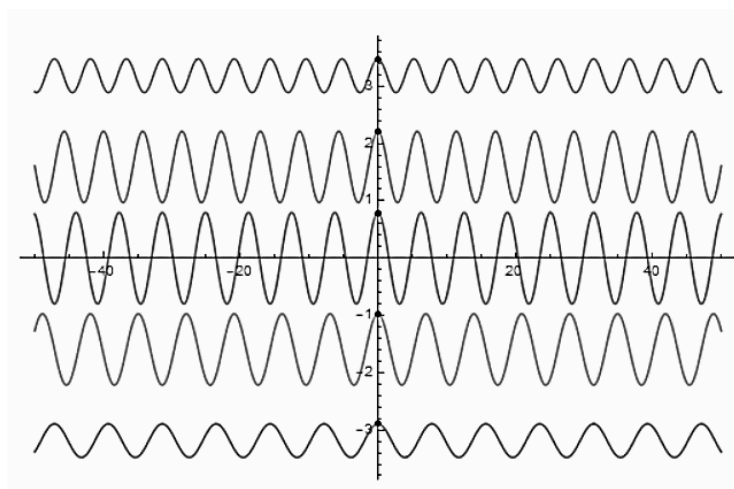
Questa posizione è esatta nel senso che le incertezze che potremmo avere dipendono solo dall'incertezza con cui abbiamo misurato la velocità iniziale e di quella con cui vogliamo determinare il tempo. Ma si tratta solo di incertezze sperimentali. In linea di principio possiamo essere preciso quanto vogliamo. E se misuriamo la posizione della particella troveremo un valore in accordo con quello previsto, sempre entro le incertezze della misura.

- Calcolo del moto di una particella secondo la Meccanica Quantistica.

Il punto di partenza è esattamente lo stesso. Una particella lanciata in direzione x con velocità iniziale v_0 in direzione x su di un piano senza attrito¹¹.

Devo scrivere l'equazione di Schrödinger [che sostituisce $F=ma$] e risolverla per questo caso particolare con le condizioni iniziali che ho posto. Il procedimento è laborioso, possiamo dare il risultato finale:

La soluzione dell'equazione di Schrödinger sarà la funzione d'onda associata alla particella, ne scriviamo una tipica per una particella libera, quindi non soggetta a forze¹²: $\psi(x, t) = \sum_1^5 A_i \cos(k_i x + \omega_i t)$. Non è necessario discutere i dettagli di questa funzione, l'importante è notare che si tratta della somma di varie onde che si propagano nello spazio (x) e nel tempo (t). Queste onde hanno ognuna un'ampiezza A_i e una lunghezza d'onda $\lambda_i = 2\pi/k_i$. La frequenza $f_i = \omega_i/2\pi$ è legata alla velocità di propagazione dell'onda $v_i = \lambda_i \cdot f_i$.



¹¹ Trascuriamo il fatto che se la particella fosse microscopica risentirebbe delle forze coulombiane dovute agli atomi che si trovano nel tavolo. Come sopra avevamo trascurato l'attrito, così ora trascuriamo queste interazioni e consideriamo la particella come libera da forze nella direzione x del moto.

¹² Questo è un esempio di funzione d'onda semplificata, quella reale sarebbe composta di infiniti termini, ne sono stati scritti solo 5, ma sono sufficienti per descrivere con buona approssimazione quello che succede alla particella.

Fig. 7.5 Grafico delle 5 onde che compongono la funzione d'onda associata alla particella libera in funzione della variabile x , in ascissa, calcolate al tempo $t=0$. La somma algebrica di queste 5 onde è la funzione d'onda.

Il risultato della somma delle onde di cui al grafico 7.5 è il cosiddetto "pacchetto d'onde" mostrato in Fig. 7.6. Questa denominazione sta ad indicare che l'onda risultante non è più un'onda estesa da meno infinito a più infinito come erano le onde di partenza, ma la parte sensibilmente diversa da zero è compresa tutta all'interno di un certo intervallo spaziale, in cui si trova appunto il pacchetto d'onde risultante. E analogamente è limitata nello spazio la funzione $P(x)$ legata alla probabilità di trovare la particella in un punto se esegui una misura di posizione.

È utile fare un grafico di questa funzione, fissato per esempio un certo istante $t=t^*$, in funzione della posizione x , e il grafico corrispondente della $P(x,t)$ associata alla funzione d'onda. In Fig. 7.6 abbiamo il grafico della funzione d'onda (parte reale e parte immaginaria) corrispondente alla somma delle 5 onde di cui sopra, e della probabilità $P(x,t)$ calcolata facendo il modulo quadro della $\psi(x,t)$ ¹³.

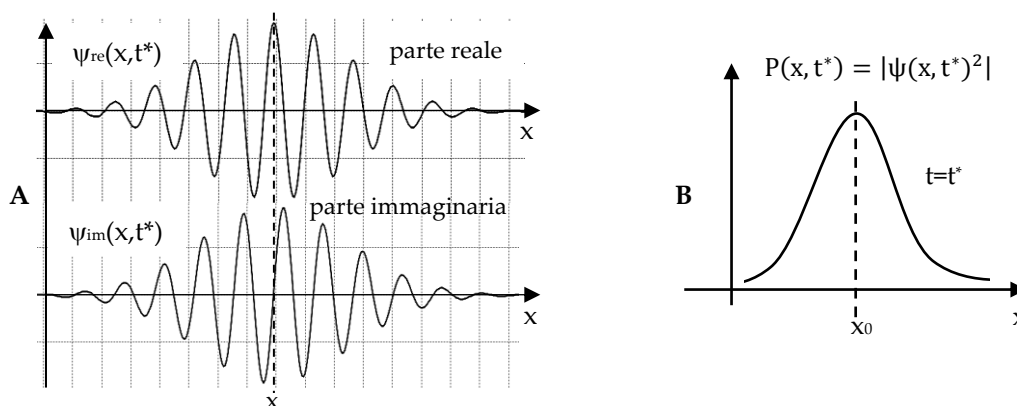


Fig. 7.6 A. I pacchetti d'onde $\psi(x,t^*)$ che descrivono la funzione d'onda al tempo $t=t^*$; viene mostrata sia la parte reale che quella immaginaria. B. La probabilità $P(x,t^*)$ associata alla funzione d'onda mostrata in figura A. Entrambe le figure sono centrate nel punto $x=x_0$

Vediamo ora l'evoluzione temporale del moto della particella. Dovremo utilizzare sempre la soluzione dell'equazione di Schrödinger e vedere come evolve in funzione del tempo data la condizione iniziale. In fig. 7.7 abbiamo riportato un grafico (approssimato) di tre probabilità $P(t) = |\psi(x, t)|^2$ per tre istanti di tempo diversi. Si può vedere come allo scorrere del tempo succedono vari fenomeni. La curva si sposta verso destra, in particolare il centro della curva – cioè la coordinata del massimo, che corrisponde al centro di massa della particella – si sposta verso destra con velocità v_0 , il moto di questo punto è lo stesso che si avrebbe calcolando il moto con la seconda legge di Newton. La curva ha una certa "larghezza" che aumenta con il tempo, l'indeterminazione di una eventuale misura aumenta. Il valore del massimo si abbassa: questo serve a garantire che l'integrale, cioè l'area sotto la curva, sia sempre uguale ad 1, cioè la probabilità di trovare la particella in un qualunque punto dello spazio – se la particella esisteva all'istante iniziale – deve essere la certezza.

¹³ In rete si può trovare un'ottima simulazione: <http://demonstrations.wolfram.com/WavepacketForAFreeParticle/>

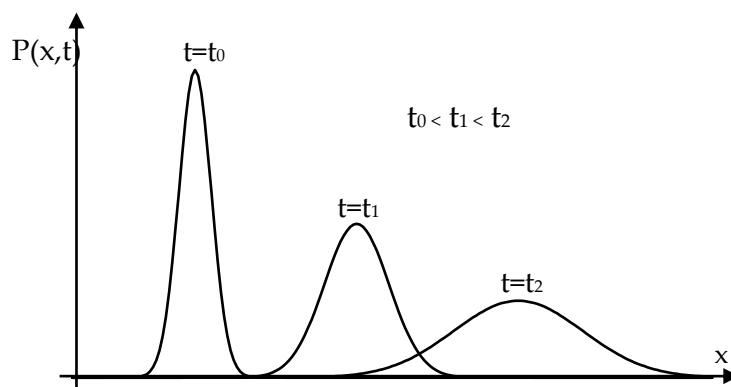


Fig. 7.7 Grafico approssimativo di tre probabilità $P(x,t) = |\psi(x,t)|^2$ per tre istanti di tempo diversi t_0 , t_1 e t_2 . La funzione d'onda iniziale è quella associata ad una particella libera che si muove in direzione x con una certa velocità iniziale v_0 verso destra.

Ed ora vediamo un punto fondamentale: cosa succede se ad un certo istante di tempo decidiamo di misurare una delle grandezze che caratterizzano la particella. Supponiamo di volerne misurare la posizione x . Daremo ora l'interpretazione della Meccanica Quantistica proposta nel 1927 da Bohr e da Heisenberg. È la cosiddetta *interpretazione di Copenaghen*, dalla città dove Bohr lavorava e dove aveva creato un cenacolo di studi sulla MQ; questa dizione fu utilizzata per la prima volta da Heisenberg nel 1955 (Kumar, 2012). L'interpretazione alla Copenaghen dice questo: se eseguiamo una misura sulla particella per determinarne la posizione allora la relativa funzione d'onda "collassa" intorno al risultato della misura. La funzione d'onda cambia forma, diventa molto stretta (attenzione non infinitamente stretta), la posizione, appena dopo la misura, è "praticamente certa". Di tutti i risultati possibili che avevamo prima della misura se ne attualizza uno solo. A questo punto, se non compiamo nessuna ulteriore misura, l'evoluzione del sistema ricomincia ad essere descritta dalla nuova equazione di Schrödinger, scritta con le nuove condizioni iniziali.

Abbiamo detto che la localizzazione della particella avviene quando facciamo una misura di posizione. Qualcuno – stiamo parlando anche di Heisenberg o Bohr¹⁴ - poteva/può essere indotto a pensare che quindi la localizzazione avvenga solo se interviene una "persona" che fa una misura. Quindi che in un universo senza persone senzienti le particelle non verrebbero mai localizzate, attribuendo questa localizzazione addirittura alla consapevolezza di un essere senziente. Questo non è corretto. Ciò che causa il collasso della funzione d'onda è una qualunque interazione del mondo esterno con il sistema in esame. L'interazione, specie nel mondo microscopico, può essere dovuta anche ad una interazione debolissima, per esempio ad un solo fotone che urta la particella. Vedremo meglio questo punto discutendo l'esperimento delle due fenditure, ma per ora deve essere chiaro che una misura è semplicemente una interazione con il mondo esterno, ci sia o no qualcuno che poi osserva il risultato di questa interazione.

7.2.2. Il significato della probabilità in Meccanica Quantistica

In meccanica classica la probabilità associata ad un evento è dovuta al fatto che, in genere, non conosco tutte le variabili del sistema (es. Il lancio di un dado, Il tiro con l'arco.) È la cosiddetta probabilità «epistemica» cioè legata ad una mancanza di conoscenza. In teoria se potessi misurare tutto, conoscerei tutto e potrei prevedere l'evoluzione dell'universo (Laplace, 1814).

¹⁴ Per alcuni dettagli vedi la scheda #8 Determinismo, caso, libero arbitrio: la discussione sulla fisica quantistica.

In Meccanica Quantistica, invece, **la descrizione completa** dello stato di un qualunque sistema, è data dalla funzione d'onda $\psi(r,t)$ che rappresenta l'ampiezza di probabilità associata al sistema.

La funzione d'onda ci dà il massimo dell'informazione possibile su di un sistema, quindi ogni previsione che si volesse fare sui risultati di una eventuale misura è probabilistica.

È la cosiddetta probabilità «non epistemica», cioè non è dovuta ad una mancanza di conoscenza dello stato iniziale di un sistema. **La probabilità è intrinseca alla realtà.** Questo è uno dei punti più controversi nella descrizione della realtà data dalla MQ. Lo stesso Einstein combatté fino alla fine contro questa interpretazione, cercando la parte "mancante" della teoria che avrebbe permesso di tornare all'ipotesi di una realtà inconoscibile (per le nostre carenze sperimentali) ma definita.

Come vedremo nel § 7.4 Einstein, con Podolsky e Rosen, nel tentativo di attaccare la completezza della MQ nel 1937 portarono a rilevare un aspetto legato al formalismo della MQ: la non località di alcuni processi fisici. Essendo questa una caratteristica che allora appariva impossibile perché non coerente p.e. con la RS, sembrò una seria obiezione alla completezza della MQ. Vedremo nel § 7.5 come il problema fu risolto brillantemente dai calcoli di J. Bell e dagli esperimenti di A. Aspect: la natura, in alcuni casi, non è locale.

C'è una caratteristica importante che riguarda la funzione d'onda e l'equazione di Schrödinger: l'equazione è lineare. Questo vuol dire che se esistono due soluzioni allora potrà esistere anche una qualunque combinazione lineare delle due soluzioni. Quindi potrà esistere una soluzione che è la somma delle due oppure differenza delle due. Questa proprietà è legata al fatto che l'equazione di Schrödinger è formalmente un'equazione differenziale lineare la cui soluzione è una funzione (una combinazione di funzioni) la cui forma matematica è quella di un'onda definita nel tempo e nello spazio. Come per una corda che vibra, se ho due modi di vibrazione, potremo avere anche la vibrazione somma o differenza dei due, analogamente le soluzioni più generali dell'equazione di Schrödinger potranno essere somme e differenze delle soluzioni semplici (semplici onde sinusoidali), con la differenza che le soluzioni non sono stati fisici misurabili direttamente, ma ampiezze di probabilità. Questo fatto sarà utile nel prossimo paragrafo per capire l'essenza del comportamento onda/particella dei corpi microscopici.

7.2.3. Il principio di indeterminazione (Heisenberg, 1927)

Il principio di Indeterminazione (d'ora in poi PdI) è uno dei cardini della MQ: ha la sua rilevanza non solo per il suo significato formale, ma per il significato concettuale che gli si attribuisce e che, come vedremo, non è univoco. Va detto, per sgomberare il campo da equivoci, che Heisenberg nei suoi lavori non utilizzò quasi mai il termine *principio*, utilizzò il termine "relazioni d'indeterminazione" o "relazioni d'inesattezza o imprecisione", ed in quasi tutte le traduzioni in altre lingue si utilizzarono termini diversi. Vedremo il perché di questa ambiguità.

Ne daremo due versioni, una è la prima - quella che si trova in quasi tutti i libri di testo - la chiameremo la versione *soft*, si riferisce all'articolo originale del 1927 (Heisenberg, 1927) la seconda, la versione che chiameremo *hard*, fu enunciata da Heisenberg nel 1930 (Heisenberg, 1930).

Il primo aspetto è che il PdI viene scritto sempre per una *coppia* di grandezze fisiche, non per una sola grandezza. Vediamolo nella versione più nota in cui la coppia di grandezze fisiche è [posizione/quantità di moto], cioè $[x,p]$, dove $p=mv$.

Il principio di Indeterminazione

(versione soft)

Per ogni sistema fisico esistono alcune coppie di grandezze fisiche che non possono essere conosciute contemporaneamente con valori arbitrariamente precisi. Il prodotto delle relative incertezze dovrà essere sempre maggiore o uguale alla costante $\hbar = h/2\pi$. Se la coppia è $[x,p]$ la relazione sarà:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$$

In questa formula Δ rappresenta l'incertezza che lo sperimentatore avrà sulle variabili che seguono il simbolo¹⁵. È importante sottolineare che le coppie di grandezze fisiche che appaiono nella relazione non sono coppie qualunque, scelte a caso fra tutte le grandezze necessarie per scrivere un sistema fisico. Il PdI viene scritto per tutte le coppie di grandezze che soddisfano una certa condizione, le cosiddette grandezze coniugate; il dettaglio va oltre gli scopi di questo libro.

Il PdI, in questa lettura, pone un limite alla precisione con cui potremo conoscere, avendole misurate, alcune coppie di grandezze fisiche.

Il punto fisico è questo: se, data p.e. una particella, vogliamo conoscere una delle grandezze fisiche che la caratterizzano, dovremo interagire con essa. Per esempio se vogliamo determinarne la posizione potremo illuminarla. Ma la luce, anche se si tratta di un solo fotone, trasmetterà parte della sua quantità di moto alla particella in modo casuale¹⁶. Quindi la particella, appena misurata, avrà una velocità e quindi una quantità di moto diversa – casualmente - da quella che aveva in precedenza: non potremo più conoscere con precisione quella iniziale.

Questa è la versione cosiddetta *a disturbo* del PdI, cioè la nostra conoscenza di alcune coppie di grandezze fisiche che caratterizzano un sistema è limitata dalla nostra interazione con il sistema per cui, misurando la prima grandezza, ne rendiamo indeterminata la seconda. In questa versione quindi il punto chiave è l'interazione dell'osservatore sul sistema in esame che preclude la conoscenza dello stato del sistema. Stato, che, in teoria, potrebbe essere perfettamente definito.

Va detto che, anche se viene chiamato *principio*, il PdI non è un principio per tutte le coppie di grandezze per cui posso scriverlo: la maggior parte delle relazioni di indeterminazione che coinvolgono coppie di grandezze fisiche può essere dimostrata a partire dal formalismo della MQ. Infatti Heisenberg nei suoi articoli parla di *relazioni* di indeterminazione. Solo per una coppia di grandezze fisiche non è possibile dare una dimostrazione matematica: la coppia [Energia, tempo], in questo caso si può parlare di vero e proprio principio.

Vediamo qualche esempio di come funziona il PdI, sempre per la coppia posizione, quantità di moto.

Supponiamo di avere una particella di massa m , che si muove in direzione x con velocità v . Il PdI lo scriveremo così:

$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$, ma $p=mv$, quindi: $\Delta x \cdot \Delta mv \geq \hbar$, ora suppongo che m sia costante, la relazione diventa:
 $\Delta x \cdot m\Delta v \geq \hbar$ oppure $\Delta x \cdot \Delta v \geq \frac{\hbar}{m} = \frac{h}{2\pi m}$, questa è la relazione che ora applicheremo a vari sistemi.

Consideriamo un oggetto macroscopico ma molto piccolo: un granello di polvere che fluttua nell'aria. Diamo alcuni valori realistici delle grandezze che caratterizzano il granello di polvere.

Diametro $\phi \sim 1 \mu\text{m}$; massa $m \sim 10^{-15} \text{ kg}$; $v \sim 1 \text{ mm/s}$ [per il calcolo che faremo non è necessario dare esattamente questi valori, basta l'ordine di grandezza]

Supponiamo ora di poter osservare il granello di polvere, ad un certo istante, con un microscopio molto potente (al limite della risoluzione di un microscopio) con una risoluzione di $0,1 \mu\text{m}=1 \cdot 10^{-7} \text{ m}$. Questa sarà l'incertezza con cui determiniamo la posizione del granello di polvere.

Calcoliamo ora, tramite il PdI, l'incertezza sulla velocità, supponendo di poterla misurare quasi contemporaneamente.

$$\text{Abbiamo: } \Delta x \cdot \Delta v \geq \frac{\hbar}{m} \quad \text{quindi } \Delta v \geq \frac{\hbar}{m \cdot \Delta x} = 1 \cdot 10^{-12} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1 \cdot 10^{-9} \frac{\text{mm}}{\text{s}} !$$

¹⁵ Il PdI si può trovare scritto in vari modi a seconda dei libri di testo e di quando è stato scritto. La versione oggi universalmente accettata è: $\sigma_{G1} \cdot \sigma_{G2} \geq \hbar/2$ in cui le σ rappresentano le deviazioni standard delle due grandezze coniugate G_1 e G_2 .

¹⁶ Ricordiamoci che questo evento deve essere trattato con la MQ, dovremo quindi risolvere l'equazione di Schrödinger, o una simile, ed il risultato sarà genuinamente casuale.

Quindi l'incertezza sulla velocità esiste, ma è di 1 miliardesimo di mm/s per una velocità di 1 mm/s. Non riusciremo mai ad avere una misura così precisa. In pratica la velocità è perfettamente determinata. Il PdI si può applicare, ma per gli oggetti macroscopici è assolutamente ininfluente per le osservazioni fatte e/o per la conoscenza che vorrò avere dell'oggetto. Tutto nasce dal fatto che a denominatore della relazione ho la massa m dell'oggetto, la grandezza \hbar/m è quindi molto piccola per oggetti macroscopici, al limite completamente trascurabile.

Consideriamo ora un esempio microscopico, molto microscopico: l'elettrone che gira intorno al protone in un atomo di idrogeno.

L'elettrone ruota con una velocità approssimativa $v \cong 2 \cdot 10^6$ m/s, supponiamo di averne misurata la velocità con una incertezza relativa del 10%. L'elettrone ha una massa $m \cong 9 \cdot 10^{-31}$ kg, quindi l'incertezza sulla posizione sarà:

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{m \cdot \Delta v} = \frac{1 \cdot 10^{-34}}{9 \cdot 10^{-31} \cdot 0,2 \cdot 10^6} \cong 5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

Ma il raggio di Bohr dell'elettrone nell'atomo di idrogeno è di circa $0,5 \cdot 10^{-10}$ m. Cioè 10 volte più piccolo dell'indeterminazione. È come se io dicessi che un certo tavolo ha una lunghezza di 1 metro più o meno 10 metri: non ha senso. Quindi non solo l'indeterminazione diventa essenziale, ma c'è qualcosa di fondamentale, con questi numeri (approssimativi) sembra che proprio non riesca a sapere dove sta l'elettrone.

E ora vediamo la versione del principio di Indeterminazione che io chiamerò *hard*, enunciata con chiarezza da Heisenberg (Heisenberg, 1930).

Il principio di Indeterminazione

(versione hard)

*Per ogni sistema fisico esistono alcune coppie di grandezze fisiche che non **possiedono** contemporaneamente con valori arbitrariamente precisi. Il prodotto delle relative incertezze dovrà essere sempre maggiore o uguale alla costante $h/2\pi$. Se la coppia è $[x,p]$ la relazione sarà:*

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$$

Come si può vedere la relazione è identica alla versione scritta sopra, quella *soft*. Ed infatti il punto è delicato, la differenza sta solo nell'interpretazione della relazione matematica. Nella versione *soft* si enunciava l'impossibilità di "conoscere" alcune grandezze fisiche. Ma in linea di principio si poteva supporre che queste grandezze possedessero dei valori definiti, il problema era la mia impossibilità nel misurarli con alta precisione.

Nella versione *hard* invece si dichiara esplicitamente che alcune grandezze non possiedono valori definiti, siano esse misurate o no. È una questione di principio con un significato molto più profondo dell'azione a disturbo relativa alla versione *soft*. Vediamo come lo dice Heisenberg nelle sue lezioni del 1930. (Heisenberg, 1930)

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h \quad (1)$$

Questa relazione di incertezza specifica i limiti entro cui si può applicare la descrizione di particella. Ogni utilizzo delle parole "posizione" e "velocità" con un'accuratezza che eccede quella data dall'equazione (1) è senza significato, come l'utilizzo di parole il cui significato non è definito.

Ed aggiunge una nota, di seguito:

A questo proposito ci si dovrebbe ricordare in particolare che il linguaggio umano permette la costruzione di frasi che non comportano conseguenze e che quindi non hanno alcun contenuto – nonostante il fatto che queste frasi producano una sorta di immagine nella nostra immaginazione; p.e., l'affermazione che oltre il nostro mondo esiste un altro mondo, con cui ogni connessione è impossibile in linea di principio, non porta ad alcuna conseguenza sperimentale, ma non produce nessuna immagine nella nostra mente. Ovviamente questa frase non può essere né provata né falsificata. Bisognerebbe stare particolarmente attenti nell'utilizzo delle parole "realtà", "in realtà", etc., dato che queste parole molto spesso portano ad affermazioni del tipo già menzionato.

La posizione di Heisenberg è questa: nel mondo microscopico ho dei sistemi fisici che non possono essere descritti con le stesse *parole* che utilizzo per descrivere i sistemi macroscopici¹⁷. Alcune di queste parole, nel mondo microscopico, hanno un significato limitato (al limite possono non avercelo), e quindi non ha senso che io ne dia un valore numerico esatto. Potremo applicare la descrizione classica con dei limiti, quelli dati dalle relazioni di Indeterminazione.

Quindi le relazioni di Indeterminazione di Heisenberg pongono un limite di principio alla mia possibilità di *parlare* dei valori che assumono alcune coppie di grandezze fisiche.

Possiamo provare chiarire questa posizione prendendo un esempio classico (nel senso della fisica classica) che ha alcuni punti in comune con quanto detto sopra.

Prendiamo in esame una delle tante coppie di grandezze per cui, in MQ, posso scrivere una relazione di Indeterminazione: la coppia [Energia, tempo], avremo:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$$

In cui il significato è che Δt rappresenta l'intervallo di tempo minimo necessario ad un sistema per variare la sua energia di ΔE - la descrizione del significato della relazione tempo energia è più complessa, l'abbiamo semplificata.

Consideriamo ora un sistema "classico": un suono emesso da uno strumento che arriva al nostro orecchio, o che viene registrato in un punto dello spazio.

E supponiamo che questo suono sia quello emesso da un orchestrale per permettere agli altri orchestrali di accordare i loro strumenti. Questo suono sarà tipicamente quello emesso dalla corda di un violino, che produrrà una nota per un tempo sufficientemente lungo. Nessuno utilizzerà come sorgente un colpo di tamburo, anche se è possibile avere un tamburo che emette una nota riferimento. Perché? Il fatto è che, se vado a misurare la frequenza emessa da uno strumento, sollecitato in un certo modo, avremo che essa è tanto più precisa quanto più lungo è il tempo per cui viene emessa. Mentre un suono molto breve [un colpo di tamburo, ma anche una nota di violino emessa per un tempo brevissimo] sarà composto da molte frequenze vicine sovrapposte. Sarà quasi impossibile distinguere con esattezza la nota fondamentale.

Quanto detto a parole non è altro che il principio della trasformata di Fourier, un teorema matematico; la trasformata di Fourier permette di esprimere una funzione che varia nel tempo in funzione delle frequenze di cui è composto il segnale. Senza addentrarci nei dettagli matematici vediamo il significato fisico. Quello che succede è che un suono che dura un tempo molto lungo può essere rappresentato da una sola frequenza, mentre un suono molto breve sarà composto da varie frequenze. Se caratterizziamo il suono con due grandezze: la frequenza emessa f e la durata t del segnale sonoro, avremo, per ogni tipo di segnale, anche l'incertezza sulle frequenze emesse e sulla durata del segnale: con Δf possiamo indicare l'incertezza della frequenza emessa e con Δt la sua durata, cioè l'incertezza sul tempo di arrivo.

Bene, il teorema di Fourier stabilisce fra l'altro che fra queste grandezze esiste la relazione.

$$\Delta f \cdot \Delta t \cong 1$$

Questa relazione appartiene alla fisica classica e deriva semplicemente dal fatto che stiamo considerando dei fenomeni descritti da onde o da combinazioni di onde definite nello spazio e nel tempo.

Ed ora un passaggio ardito: moltiplichiamo la relazione di cui sopra per h , la costante di Planck: avremo $h \cdot \Delta f \cdot \Delta t \cong h$ oppure $\Delta(hf) \cdot \Delta t \cong h$, ma hf rappresenta l'energia E di un fotone, quindi questa relazione possiamo scriverla anche come $\Delta E \cdot \Delta t \cong h$. Notate che abbiamo mischiato variabili e proprietà quantistiche con quelle classiche, quindi questa non è una dimostrazione, ma serve a far vedere come utilizzando alcune variabili classiche possiamo arrivare ad una relazione che coinvolge le variabili della relazione di indeterminazione di Heisenberg: Energia, tempo e la costante di Planck.

¹⁷ La distinzione fra sistemi macroscopici e sistemi microscopici non è semplice da formalizzare. Vedremo un criterio nel § 7.7

Il cuore di tutto è la rappresentazione, à la Schrödinger, di un sistema quantistico. Un sistema è descritto sempre da una funzione d'onda che possiede tutte le caratteristiche formali delle onde, per cui posso farne la trasformata di Fourier e trarne le conseguenze del caso.

7.2.4. Il principio di esclusione di Pauli

Nel 1925 Wolfgang Ernst Pauli (1900-1958) enunciò il principio che porta il suo nome e per cui ricevette il Premio Nobel per la Fisica nel 1945. Il principio può essere espresso così (Cohen-Tannoudji, Diu, & Laloe, 1977):

Due fermioni identici non possono trovarsi nello stesso stato individuale.

Per comprendere il significato di questa espressione è necessario chiarire il significato di alcuni termini. Intanto il termine *fermione* – che verrà ripreso nel § 8.2. I fermioni comprendono tutte le particelle con massa che hanno uno spin semintero ($\pm 1/2, \pm 3/2, \pm 5/2$), dove lo spin è uno dei numeri quantici che caratterizzano qualunque particella legato al valore del suo momento angolare intrinseco. Il punto importante è che sono fermioni il neutrone, il protone, l'elettrone, tutti gli atomi e tutte le molecole.

Il principio di Pauli quindi possiamo applicarlo a tutta la materia stabile di cui è composto il nostro universo. Per fermioni *identici* e nello stesso stato *individuale* si intendono due fermioni dello stesso tipo, quindi o due elettroni, o due protoni, che inoltre sono descritti individualmente dalla stessa funzione d'onda. Per *individualmente* si intende che sono descritti dalla stessa funzione d'onda, ognuno separatamente. Questa impossibilità riferita a fermioni *identici* e nello stesso stato *individuale* è il cuore del principio.

Se consideriamo per esempio due elettroni *identici* che ruotano intorno ad un protone la loro funzione d'onda ci dice che con una certa probabilità si troveranno in una certa corona sferica che ha come raggio medio la distanza media dell'elettrone dal nucleo. Ora, in teoria, nulla ci vieterebbe di pensare a più elettroni identici che si trovano in quella corona sferica. Lo spazio sarà essenzialmente vuoto anche se avessimo decine di elettroni identici che si trovano in media alla stessa distanza dal protone. Il principio di Pauli ci dice che ciò è impossibile. In quella zona possiamo avere al massimo due elettroni, uguali in tutto eccetto che per la grandezza *spin*, che per uno sarà $1/2$, mentre per l'altro sarà $-1/2$. Quindi i due elettroni non saranno identici (saranno descritti da numeri quantici diversi, quindi anche la loro funzione d'onda sarà diversa) e potranno trovarsi nella stessa zona di spazio. Questo principio è quello che spiega l'impenetrabilità dei corpi.

Nulla vieterebbe agli elettroni di due atomi di *entrare* gli uni nello spazio nell'altro, compenetrandosi. Gli atomi sono essenzialmente vuoti, quindi ci sarebbe spazio a sufficienza per inserire più elettroni intorno ai nuclei. Ma il principio di Pauli vieta questa situazione, per cui la compenetrazione, che dal punto di vista spaziale o delle repulsioni e.m. sarebbe possibile, non può avvenire. Il principio di Pauli, enunciato nel 1925, ha una sua giustificazione teorica, per alcuni casi particolari, utilizzando il formalismo della MQ sviluppato dopo il 1927, comprendente la descrizione di particelle con spin.

7.3. Un esperimento famoso: le due fenditure

Per capire la natura quantistica delle particelle microscopiche e il dualismo onda-particella è utile discutere in dettaglio un famoso esperimento: l'esperimento delle due fenditure. Si tratta di estendere a sistemi qualunque l'esperimento delle due fenditure fatto con un raggio di luce già discusso nel §4.5.1.(cfr.).

Questo esperimento è presentato in tutti libri di fisica, talvolta in maniera molto semplificata, talvolta approfondendo tutti i dettagli concettuali e formali, è praticamente impossibile darne una versione originale. Qua seguiremo l'approccio che riteniamo più utile per la comprensione dei

fenomeni coinvolti pur senza troppi formalismi, quello dato da R. Feynman nelle sue famose lezioni e ripreso in altri suoi libri (Feynman, 2002).

Concettualmente l'esperimento delle due fenditure è quello mostrato in fig.7.8: si ha una sorgente di ... (lo specificheremo), un ostacolo indistruttibile con due fenditure parallele, uno schermo su cui raccogliere, e misurare, ciò che è passato attraverso le due fenditure.

Quello che faremo è di considerare l'esperimento delle due fenditure cambiando la sorgente che invia "qualcosa" verso le due fenditure e osservando cosa si vede sullo schermo posto dopo le fenditure in cui possono essere eventualmente presenti dei rivelatori di ciò che è stato messo dalla sorgente. È importante sapere che gli esperimenti che discuteremo, pur avendo una parte ideale necessaria per analizzare più facilmente i risultati dell'esperimento, sono stati tutti realizzati in laboratorio in versioni concettualmente simili a quelle che discuteremo qui.

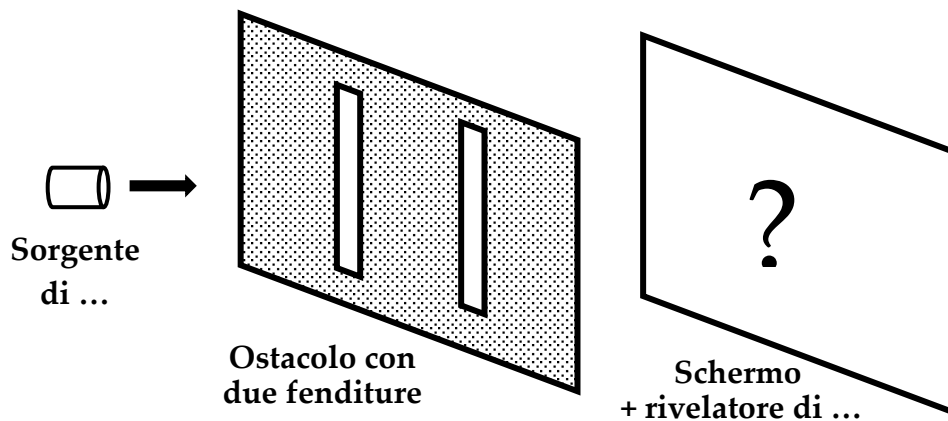


Fig. 7.8 Lo schema concettuale di tutti gli esperimenti con le due fenditure: una sorgente che emette proiettili, fotoni (luce), particelle microscopiche. Un ostacolo infinitamente rigido con due fenditure parallele. Uno schermo con cui raccogliere, e misurare, ciò che è passato attraverso le fenditure.

Primo esperimento: La sorgente spara proiettili macroscopici. [Fig. 7.9]

Supponiamo che la sorgente sia una pistola che spara proiettili contro lo schermo che in questo caso è un muro con due fenditure ben più larghe della larghezza di ogni proiettile. Le ipotesi che facciamo sono queste: la pistola è una pistola "ballerina", non è ben fissata sulla sua base, spara quindi proiettili più o meno verso le due fenditure, ma con un angolo casuale, talvolta più in alto, talvolta più in basso. I proiettili sono indistruttibili, quindi non possono dividersi in pezzi quando urtano il muro o i bordi delle due fenditure. Anche il muro è indistruttibile, quindi sia il muro che le fenditure non si rompono quando vengono raggiunte dai proiettili. La pistola spara un proiettile alla volta e sullo schermo c'è un apparato che rivela punto per punto i proiettili quando arrivano, contandoli. Per ogni configurazione potremo fare quindi un grafico della probabilità che arrivi un proiettile per ogni punto dello schermo.

Le fenditure, chiamate F_1 e F_2 , possono essere tutte e due chiuse, tutte e due aperte oppure una aperta e una chiusa, potremo scegliere ognuna delle quattro configurazioni.

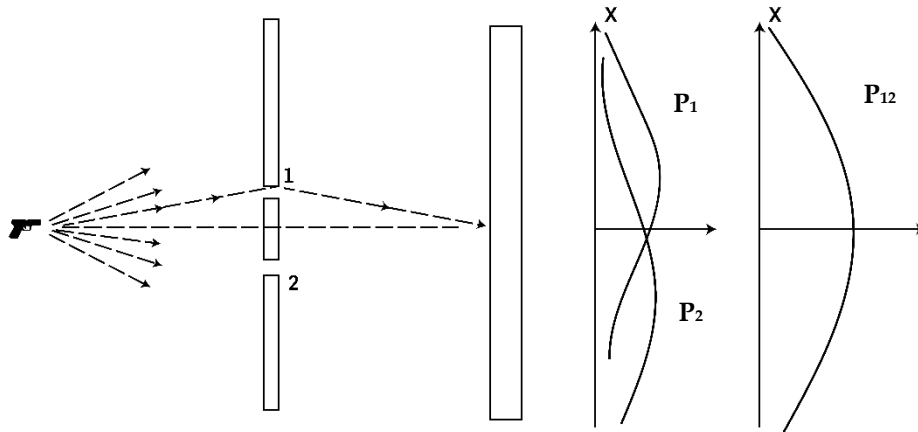


Fig. 7.9 La sorgente è una pistola che spara proiettili macroscopici in direzione casuale. Se una sola delle due fenditure è aperta, la 1 p.e., i proiettili passeranno per la fenditura 1 e sullo schermo avrò la probabilità P_1 . Analogamente se è aperta solo fenditura 2. Sullo schermo avremo quindi la probabilità P_1 oppure la probabilità P_2 . Se entrambe le fenditure sono aperte i proiettili potranno passare attraverso la fenditura 1 **oppure** attraverso la fenditura 2. Sullo schermo si avrà quindi la somma delle due probabilità indipendenti P_1 e P_2 . La probabilità $P_{12} = P_1 + P_2$.

La probabilità di arrivo dei proiettili nella posizione x e con le fenditure nella condizione C sarà:

$$P_C(x) = \frac{\text{Numero di proiettili che arrivano nella posizione } x \mid \text{fenditure nella condizione } C}{\text{Numero di proiettili totali sparati dalla sorgente}}$$

Le possibili opzioni per C sono:

$C=0$ Tutte e due le fenditure sono chiuse // $C=1$ Solo la fenditura 1 aperta // $C=2$ Solo la fenditura 2 aperta // $C=12$ tutte e due le fenditure aperte.

Il risultato dell'esperimento è questo:

$C=0$. Tutte e due le fenditure chiuse: tutti i proiettili urtano contro un ostacolo, sullo schermo non arriva niente. $P_0(x)=0$, dappertutto.

$C=1$ o $C=2$. Viene aperta la prima oppure la seconda fenditura: i proiettili che arrivano sullo schermo passano attraverso la prima oppure attraverso la seconda fenditura. Il rivelatore che conta i proiettili che arrivano sullo schermo avrà due figure associate alla probabilità di arrivo, una per la fenditura 1, $P_1(x)$, e una per la fenditura 2, $P_2(x)$. Queste figure sono un po' allargate rispetto alla larghezza della fenditura perché qualche proiettile urterà il bordo della fenditura venendo deviato verso l'alto o verso il basso. $P_1(x)$ o $P_2(x)$ hanno la forma di una campana.

$C=12$. Tutte e due le fenditure aperte: i proiettili passeranno attraverso la prima oppure la seconda fenditura, la probabilità sarà la somma delle probabilità¹⁸ del caso precedente $P_{12}(x)=P_1(x)+P_2(x)$.

Secondo esperimento: La sorgente è una sorgente di luce che emette luce di lunghezza d'onda λ . Le due fenditure hanno una larghezza confrontabile con λ . [Fig. 7.10]

In questo caso il rivelatore sarà un rivelatore di luce che misurerà punto per punto l'intensità della luce $I(x)$ che arriva sullo schermo. L'intensità dell'onda è proporzionale al quadrato della sua ampiezza

¹⁸ È il caso della probabilità totale per eventi incompatibili (il proiettile passa dalla fenditura F_1 oppure dalla fenditura F_2) che è data dalla somma delle probabilità per ognuno degli eventi singoli.

$I \propto A^2$, dove in questo caso l'ampiezza è l'ampiezza del campo elettrico dell'onda elettromagnetica associata all'onda. Il risultato dell'esperimento è questo (le opzioni sono le stesse dell'esperimento precedente):

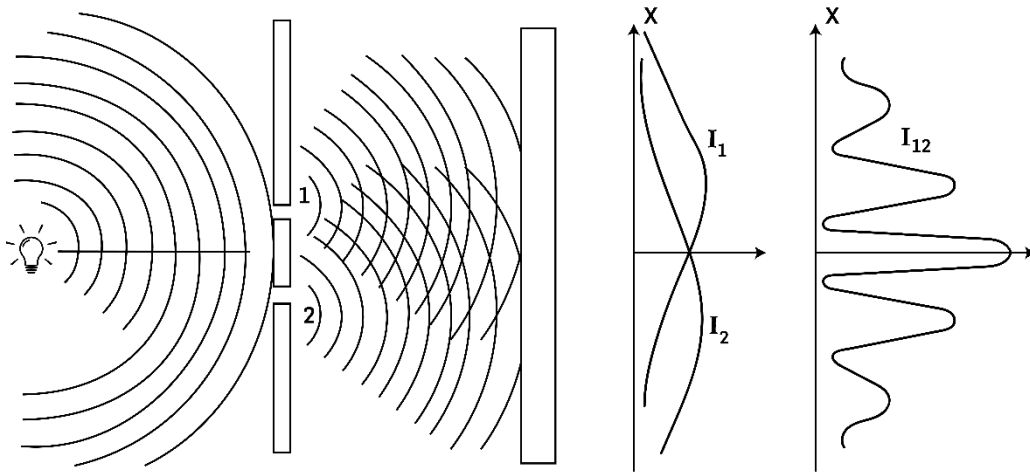


Fig. 7.10 La sorgente emette luce verso le due fenditure. Se una sola delle due fenditure è aperta, allora sullo schermo si ha l'intensità 1 oppure l'intensità 2. Se le due fenditure sono entrambe aperte l'intensità risultante è I_{12} . Si ha quindi una figura di interferenza, non la semplice somma delle intensità.

$C=0$ Le due fenditure sono chiuse: non arriva luce sullo schermo. $I_0(x)=0$

$C=1$ o $C=2$. Viene aperta la prima OPPURE la seconda fenditura: la luce passa attraverso la prima oppure la seconda fenditura. La figura dell'intensità sullo schermo è allargata per il fenomeno della diffrazione. $I_1(x) \propto |A_1(x)|^2$; $I_2(x) \propto |A_2(x)|^2$.

$C=12$. Tutte e due le fenditure vengono aperte. In ogni punto dello schermo arriva luce sia dalla prima che dalla seconda fenditura. Si ha il fenomeno dell'interferenza dei due raggi di luce. L'intensità della luce si deve calcolare prima sommando le ampiezze delle due onde e poi facendone il quadrato, per avere l'intensità totale.

$$I_{12}(x) \propto |A_1(x) + A_2(x)|^2 \propto I_1(x) + I_2(x) + 2\sqrt{I_1(x) \cdot I_2(x)} \cos \delta$$

dove δ è la differenza di fase fra l'onda che arriva dalla fenditura 1 e quella che arriva dalla fenditura 2. Questa differenza di fase dipende dal punto di arrivo dello schermo. Potrà essere un qualunque numero fra 0 e π , quindi l'intensità presenterà una serie di massimi e di minimi: la cosiddetta figura di interferenza.

Terzo esperimento: La sorgente emette elettroni con velocità v in direzioni casuali; le fenditure hanno una larghezza confrontabile con la lunghezza d'onda di de Broglie associata agli elettroni [Fig. 7.11]

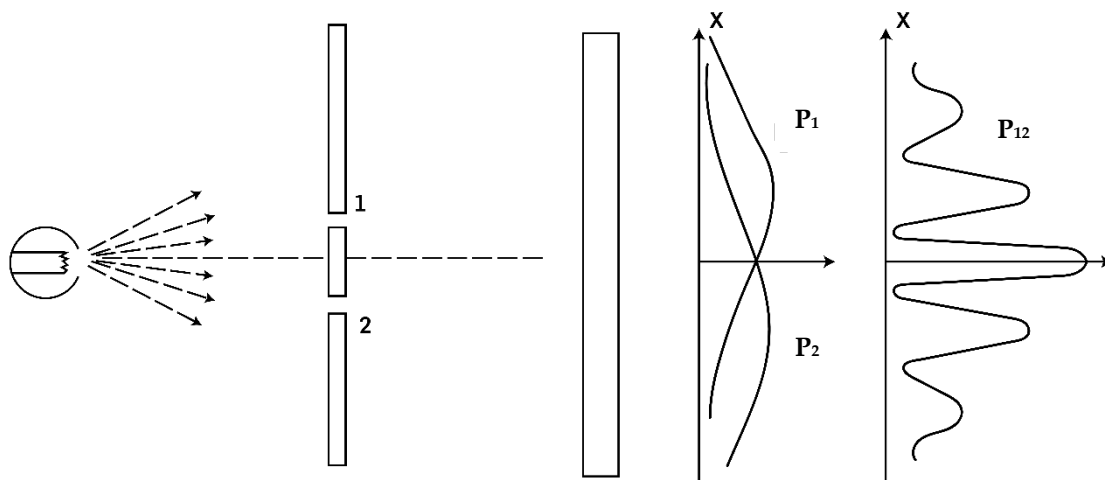


Fig. 7.11 La sorgente emette un elettrone per volta. Sullo schermo c'è un rivelatore di elettroni che si può spostare lungo lo schermo per misurare $P(x)$, la probabilità di arrivo nelle varie configurazioni delle due fenditure.

L'esperimento è analogo al caso dei proiettili, sullo schermo avremo un comune rivelatore (contatore) di particelle. La sorgente sarà tale da emettere un elettrone alla volta e il contatore conterà, per ogni posizione, il numero di elettroni arrivati (nella versione più sofisticata potremo avere anche tanti contatori per ogni valore della x , o addirittura una pellicola fotografica che viene impressa all'arrivo di ogni elettrone).

Eseguendo l'esperimento secondo le modalità dei casi precedenti – con la prima oppure la seconda fenditura aperta - vediamo che il contatore si comporta come nel caso del rivelatore dei proiettili: ogni volta che arriva un elettrone il contatore conta. Alla fine potremo calcolare la probabilità di arrivo misurata in ogni posizione x : avremo due curve $P_1(x)$ o $P_2(x)$ esattamente come si aveva per i proiettili.

Ed ora apriamo tutte e due le fenditure. Ora la curva di probabilità risultante ha la stessa forma di quella che si era ottenuta nel caso delle onde: presenta una serie di massimi e minimi, indizio questo che si ha il fenomeno dell'interferenza.

Questo è un esperimento molto delicato e difficile, ma è stato fatto e vale la pena di vedere il risultato sperimentale: in Fig. 7.12 abbiamo le foto dello schermo quando viene raggiunto da 10, 200, ... 200'000 elettroni. Si può vedere come sullo schermo, su cui arriva un elettrone per volta, dopo circa 6'000 elettroni inizia a comparire la figura di interferenza con massimi e minimi del numero di elettroni arrivati in funzione della posizione. Un filmato dell'esperimento, fatto da altri ricercatori, si può vedere su questo sito¹⁹.

¹⁹ http://www.physique.ens-cachan.fr/old/franges_photon/interference.htm

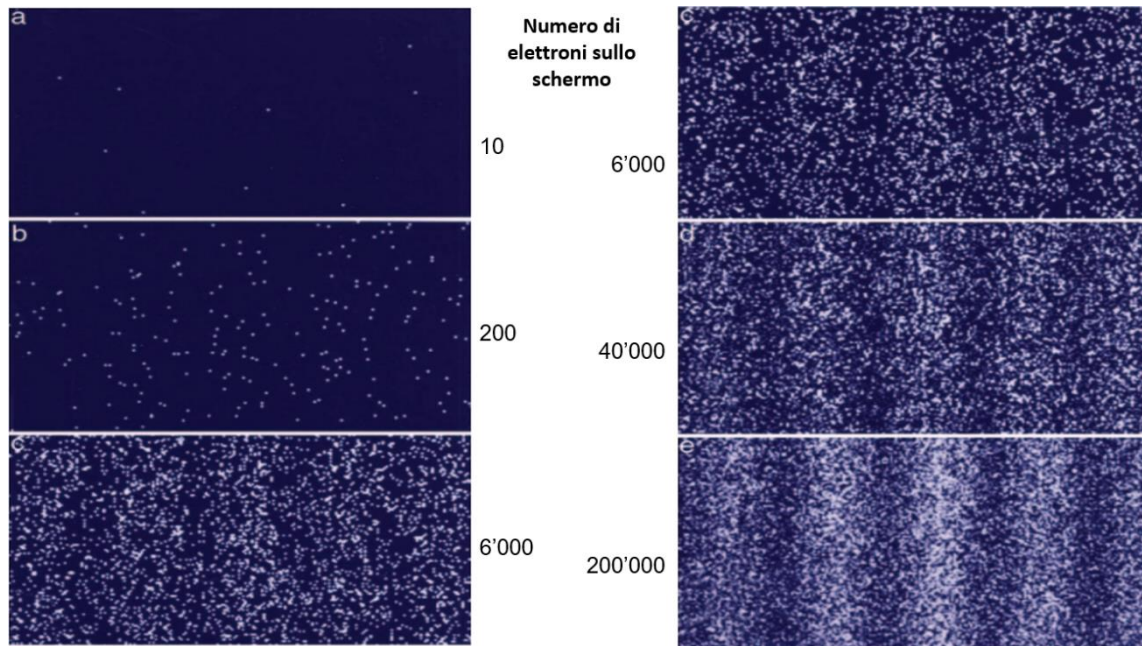


Fig. 7.12 Risultati dell'esperimento delle due fenditure fatte con una sorgente di elettroni singoli. Le varie lettere corrispondono a raffigurazioni dello schermo con un diverso numero di elettroni arrivati, da a=10 elettroni FINO a e= 200'000 elettroni. Si vede che da 6'000 elettroni in poi comincia ad apparire una figura di interferenza, anche se sullo schermo arriva un elettrone per volta.

Questo è un problema. Nel caso delle onde era ovvio: l'onda, che era presente in tutto lo spazio a sinistra delle fenditure, passava da entrambe le fenditure, poi si ricombinava (si sommava) sullo schermo con fasi diverse e l'intensità risultante, che ricordiamo è il quadrato dell'ampiezza totale dell'onda, era appunto una figura di interferenza. Ma ora per le fenditure passa un solo elettrone alla volta (ricordiamoci che l'elettrone è una particella indivisibile, non possiamo avere *mezzo* elettrone che passa da una parte e mezzo dall'altra). Quindi sembra che gli elettroni si comportino come onde, mentre è chiaro che partono come particelle, e che arrivano come particelle (potremmo mettere altri rivelatori vicino alla sorgente per verificare che vengono emessi sempre singoli elettroni). Perché? Questo è uno degli esperimenti in cui la fisica classica non riesce a fare alcuna predizione, neanche approssimata di quello che si osserva nella realtà. Il comportamento degli elettroni non è assolutamente spiegabile in termini classici.

Ecco come questo esperimento viene trattato dalla MQ: l'elettrone è sempre descritto da una funzione d'onda; quando si trova immerso nel filamento della sorgente la sua funzione d'onda è una funzione d'onda particolare, è localizzata. Una volta emesso la sua funzione d'onda inizia a propagarsi nello spazio. Quando la funzione d'onda raggiunge le due fenditure si modifica, dalle due fenditure escono due funzioni d'onda che a loro volta si propagano in tutto lo spazio a destra delle fenditure. Ogni punto dello schermo sarà raggiunto dalle due funzioni d'onda che si sommeranno ed il cui quadrato (il modulo quadro in realtà) darà la probabilità di trovare l'elettrone in ogni singolo punto dello schermo.

In un qualunque punto dello schermo arriveranno le due funzioni d'onda $\psi_1(x,t)$ e $\psi_2(x,t)$ uscite dalle due fenditure. Se decidiamo di *misurare* la posizione degli elettroni sullo schermo, con un qualunque rivelatore, e vogliamo fare una previsione del risultato, potremo solo calcolare la probabilità che sullo schermo venga rivelato un elettrone in un certo punto x . Questa probabilità è il modulo quadro della funzione d'onda totale²⁰.

²⁰ Qui abbiamo semplificato la formula scrivendo direttamente la Probabilità calcolata per un intervallo dx opportuno.

$$P_{12} = |\psi_{12}|^2 = |\psi_1 + \psi_2|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + 2|\psi_1| \cdot |\psi_2| \cdot \cos \delta$$

Dove δ è la differenza di fase fra le due funzioni d'onda.

Ma questa è esattamente la formula che ci dà, sotto opportune condizioni, una figura di interferenza. Quindi avremmo risolto tutto. Ora abbiamo una teoria che ci permette di fare una previsione su quello che misuriamo, cosa che la Fisica Classica non faceva. La MQ funziona!

In Tabella 7.2 abbiamo riassunto i punti essenziali dei tre esperimenti che abbiamo fatto

Sorgente	Oggetto emesso dalla sorgente	Probabilità (Intensità) misurata in ogni punto	P_{12} ; I_{12} [Probabilità ; Intensità] le due fenditure sono aperte
N Proiettili	Oggetto singolo	Discreta: $P(x) = \frac{n(x)}{N}$	$P_1 + P_2$ [figura con un massimo]
Onde, luce.	Onda di ampiezza $A(x,t)$	Grandezza continua: $I(x) = A(x) ^2$	$I_{12} = A_1(x) + A_2(x) ^2 =$ $= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$ [figura di interferenza]
N Elettroni, emessi uno per volta. Tutti con la stessa velocità v_e (in modulo)	Onda di $\lambda = \frac{h}{p}$ E/O Particella di m_e, v_e	Discreta: $P(x) = \frac{n(x)}{N}$	$P_{12} \neq P_1 + P_2$ $P_{12} = \psi_{12} ^2 =$ $= \psi_1 ^2 + \psi_2 ^2 + 2 \psi_1 \psi_2 \cdot \cos \delta$ [figura di interferenza]

Tab. 7.2 I risultati dei tre esperimenti precedenti, e come vengono descritti dalla MQ.

Ma rimane il problema di capire cosa sia successo. Come fa l'elettrone a mostrare interferenza se ne parte/passa/arriva sullo schermo solo uno alla volta? Da dove passa l'elettrone?

Cerchiamo di "osservare" questi elettroni nel loro cammino per vedere da quale fenditura passano, per esempio inserendo una sorgente di luce tra le due fenditure (Fig. 7.13).

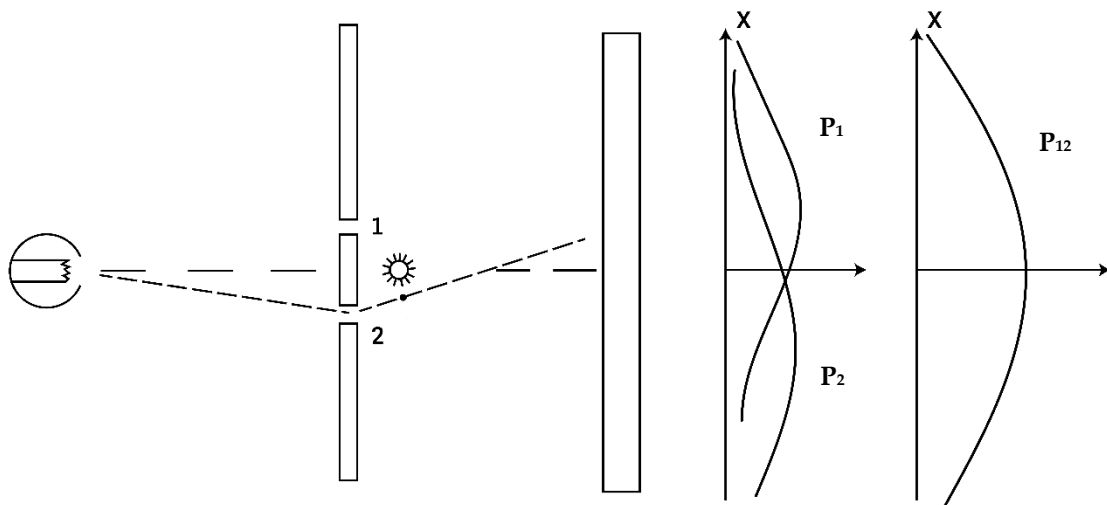


Fig. 7.13 Risultato dell'esperimento se proviamo a vedere da dove passa l'elettrone ponendo una sorgente di luce vicino alle fenditure. Ora sappiamo da dove passa l'elettrone, ma l'interferenza sparisce.

La sorgente di luce illumina tutto lo spazio emettendo fotoni, se nel loro cammino uno o più fotoni incontrano un oggetto (l'elettrone) vengono diffusi e noi li possiamo vedere. Vedremo un lampo vicino alla fenditura 1 (o 2) se l'elettrone sarà uscito vicino alla prima (o alla seconda) fenditura. Quindi ora possiamo sapere da dove è passato l'elettrone. Ma in questo caso la figura di Probabilità sullo schermo sarà la stessa dell'esperimento con i proiettili: l'interferenza è sparita.

Quello che possiamo pensare è che la luce "disturba" l'elettrone, magari perché è troppo intensa. In fondo gli elettroni sono molto piccoli, può darsi che i fotoni abbiano un'energia troppo grande e spostino gli elettroni distruggendo la delicata figura di interferenza.

Allora proviamo ad osservarli con una luce più debole, meno intensa. Una luce più debole non significa una energia minore perché, data la frequenza f dell'onda, ogni fotone avrà un'energia $E = hf$. Significa solo che avremo meno fotoni al secondo (anche questa è una frequenza, ma non ha nulla a che fare con la frequenza f legata all'energia del fotone), qualcuno intercetterà l'elettrone, così da vedere dove passa; qualcuno invece non intercetterà l'elettrone e non vedrà dove è passato. Possiamo selezionare sullo schermo tutti gli elettroni di cui conoscevamo la fenditura di passaggio e che quindi sono stati illuminati, e tutti gli elettroni arrivati senza essere stati illuminati. Nel primo caso potremo vedere da dove è passato l'elettrone, ma l'interferenza sarà sparita. Nel secondo caso avremo l'interferenza, ma non saremo riusciti a sapere da dove sono passati gli elettroni.

Allora proviamo a diminuire l'energia del fotone, quindi diminuiamo la frequenza f , cioè aumentiamo la lunghezza d'onda λ del fotone. Andiamo a vedere cosa succede a tutti gli elettroni per cui abbiamo avuto un lampo di luce e... la figura di interferenza è riapparsa! Evviva!

Quindi ora, pur mantenendo la figura di interferenza, potremmo sapere da dove è passato l'elettrone. No! Purtroppo la cosiddetta risoluzione ottica, quella che determina se gli oggetti che vediamo sono "a fuoco" oppure se l'immagine è "sfuocata", è dell'ordine di λ , la lunghezza d'onda della luce utilizzata. Se abbiamo una luce di lunghezza d'onda λ non potremo distinguere due oggetti (due punti) più piccoli e più vicini della lunghezza d'onda della luce che li illumina. Vedremo una sola figura sfuocata in cui le immagini dei due oggetti sono parzialmente sovrapposte.

Nel nostro caso quello che succede è che per poter vedere la figura di interferenza dobbiamo utilizzare una luce con una lunghezza d'onda che non ci permette di vedere da dove è passato l'elettrone, al massimo possiamo sapere che è passato, ma non la sua posizione.

Quindi abbiamo due sole possibilità:

- A) Rinunciamo a sapere da dove sono passati gli elettroni. Abbiamo una figura di interferenza. Gli elettroni sembrano comportarsi come onde.
- B) Riusciamo a vedere da dove sono passati gli elettroni. Non abbiamo una figura di interferenza. Gli elettroni sembrano comportarsi come proiettili.

Sembra un puzzle, ma la MQ ci dà un'interpretazione semplice. Quello che succede è che quando un fotone urta contro un elettrone è come se avessi un urto fra due palle da biliardo. Quindi tutto è determinato dalle energie e dagli impulsi delle due particelle. Nel caso del fotone la quantità di moto è $p = h/\lambda$, se la quantità di moto del fotone è piccola, quindi la frequenza è grande, lo stato dell'elettrone viene disturbato poco, la parte di funzione d'onda che si trovava in quella parte di spazio resta quasi identica e può interferire con la parte di funzione d'onda che è passata indisturbata dall'altra fenditura. Se invece il fotone ha un grande quantità di moto, quindi una piccola lunghezza d'onda, l'elettrone nell'urto viene modificato notevolmente, la sua funzione d'onda cambia e si perde la condizione che permetteva di avere interferenza.

In questa descrizione ci sono due punti chiave. Intanto è una prima dimostrazione di come funziona il principio di Indeterminazione di Heisenberg nella versione "a disturbo": non possiamo sapere con precisione arbitraria la posizione di una particella e la sua velocità (la sua quantità di moto) perché se osserviamo una delle due grandezze modificheremo l'altra in maniera casuale aumentandone l'incertezza. Se conosciamo bene la posizione, la velocità sarà molto indeterminata (nessuna interferenza). Se invece vediamo l'interferenza questo vuol dire che la velocità sarà ben determinata ma non potremo sapere da dove è passato l'elettrone.

Il secondo punto critico è: ma quindi l'elettrone è un'onda o una particella? E da dove passa quando arriva sullo schermo? Ecco tutte le possibilità:

- O il cammino attraverso la fenditura 1 o il cammino attraverso la fenditura 2: No, se fosse così sullo schermo dovremmo vedere la figura somma delle due probabilità, senza minimi e massimi. Se vediamo l'interferenza vuol dire che ho la somma di due "oggetti" passati da 1 e da 2.
- Tutti e due i cammini contemporaneamente: No, l'elettrone è indivisibile, ogni volta che lo guardiamo (lo misuriamo) troviamo sempre un solo elettrone, mai mezzo elettrone.
- Nessuno dei due cammini (gli elettroni potrebbero aver fatto un percorso strano a noi ignoto): No, se chiudiamo le due fenditure non vediamo nessun elettrone arrivare sullo schermo.

E quindi? Il fatto è che non ha senso parlare dell'elettrone quando non lo osserviamo. L'elettrone, nel nostro linguaggio, è un oggetto materiale, piccolo, localizzato: una particella. In realtà l'elettrone è un oggetto quantistico, descritto dalla sua funzione d'onda: in alcuni istanti può essere descritto con le grandezze tipiche della meccanica classica, in altri istanti deve essere descritto dalla sua funzione d'onda e NON POSSIEDE alcune proprietà classiche ben determinate (è il PdI versione hard), almeno fin quando non interagisce con un oggetto esterno.

Nella figura 7.14 abbiamo indicato schematicamente i vari passaggi temporali: dall'emissione di ogni elettrone dalla sorgente S fino alla sua rivelazione sullo schermo (nel caso sia passato attraverso una delle fenditure). L'ipotesi è che la descrizione corretta sia quella data dalla MQ. L'elettrone, finché è in volo, cioè fin quando non viene rivelato, è descritto da una funzione d'onda non localizzata. L'elettrone si localizza, con una funzione d'onda diversa da zero solo in un piccolissimo intervallo, all'inizio ed alla fine del processo. In questi due istanti (ri)acquista le proprietà di una particella

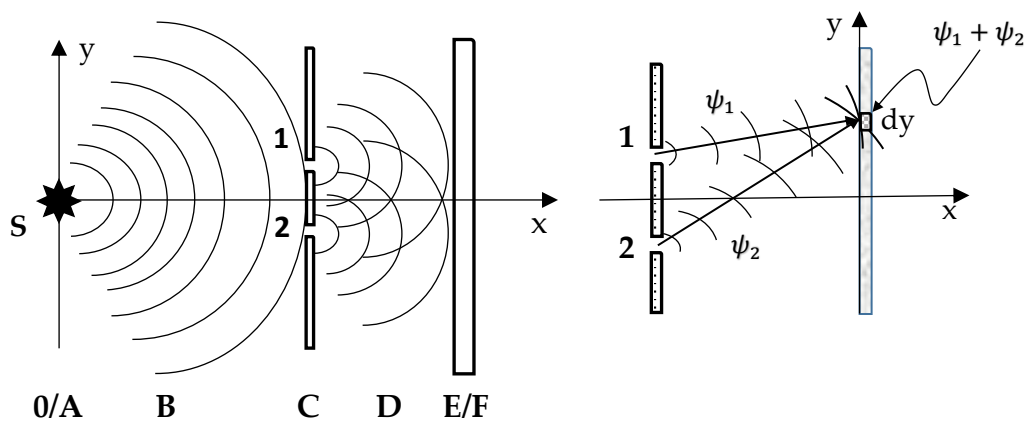


Fig. 7.14 La sorgente S emette un elettrone per volta e uno strumento rivela un elettrone alla volta sullo schermo. Vengono indicati tutti gli istanti che descrivono il comportamento del sistema dalla emissione iniziale fino alla ricezione sullo schermo. A destra la somma delle due funzioni d'onda appena prima della rivelazione sullo schermo.

localizzata e può essere descritto con le usuali grandezze della fisica classica.

Gli istanti essenziali dell'esperimento sono indicati con le lettere che vanno da 0 fino ad F:

0: Un elettrone si trova nella sorgente S.

A: L'elettrone viene emesso dalla sorgente S.

B: La funzione d'onda si trova nello spazio fra la sorgente S e le due fenditure 1 e 2.

C: La funzione d'onda attraversa le due fenditure 1 e 2.

D: La funzione d'onda totale si trova nello spazio fra le due fenditure e lo schermo.

E: La funzione d'onda arriva sullo schermo, appena **prima** della rivelazione.

F: La funzione d'onda (l'elettrone) viene localizzata/o in un punto dello schermo.

	Cosa succede secondo la MQ – Interpretazione di Copenaghen	Parametri/proprietà	O/P ?
0	L'elettrone è localizzato nella sorgente, sta per essere emesso, ha una posizione (quasi) definita al tempo $t=0$.	Posizione: $(x, y; t) = (0, 0; 0)$	P
A	L'elettrone viene emesso al tempo $t_0=dt$: è descritto da una f.d.o. localizzata vicino alla sorgente.	$\psi(0; t_0)$	O
B	La f.d.o. si estende nello spazio-tempo, si muove verso destra, allargandosi.	$\psi(x, y; t)$	O
C	La f.d.o. incontra la parete con le due fenditure, la parte che urta la parete viene assorbita (o riflessa), parte dell'onda passa da 1, parte passa da 2; passando attraverso le due fenditure, di larghezza confrontabile o minore della lunghezza d'onda associata all'elettrone, si ha il fenomeno della diffrazione, dalle due fenditure escono due funzioni d'onda semisferiche.	$\psi_1(x_1, y_1, t) ; \psi_2(x_2, y_2, t)$	O1 e O2
D	Nello spazio, in ogni punto dello spazio-tempo a destra delle fenditure, si ha la somma delle due funzioni d'onda uscite dalle due fenditure che stanno viaggiando verso destra.	$\psi(x, y; t) = \psi_1(x, y; t) + \psi_2(x, y; t)$	O1 + O2
E	In ogni punto dello schermo la f.d.o. è data dalla somma delle due f.d.o. [$\psi = \psi_1 + \psi_2$], la probabilità di rivelare l'elettrone è, per ogni intervallo dy : $dP = \psi ^2 dy$	$\psi = \psi_1 + \psi_2$ $dP = \psi ^2 dy = \psi_1 + \psi_2 ^2 dy$	O1 + O2
F	La funzione d'onda collassa, l'elettrone viene localizzato in un punto qualunque dello schermo [con probabilità $P(y)$], l'elettrone si trova con certezza dove l'ho trovato.	Posizione: (x, y, t)	P

Tab. 7.4 In questa tabella abbiamo riportato come viene descritto il fenomeno nei vari punti del tragitto che compie l'elettrone fra la sorgente, in cui viene emesso, e lo schermo, su cui viene rivelato. È importante notare che quando scriviamo O, in O/P (Onda/Particella), non stiamo parlando di un oggetto fisico. L'elettrone, come particella, ha alcune proprietà fisiche ben note, è un oggetto "reale". La funzione d'onda, invece, è un oggetto matematico, acquista significato solo considerando che ci fornisce

la probabilità di misurare una certa proprietà nel caso che l'elettrone (la sua funzione d'onda) interagisca con qualcosa, cioè che venga osservato.

Questo esperimento, che per la luce era stato fatto nel XIX secolo da vari ricercatori trovando l'usuale figura di interferenza con massimi e minimi, nel XX secolo verrà ripetuto con fotoni singoli. In questo caso si ripresenta il problema incontrato con l'elettrone, ma al contrario: la luce è un'onda, quindi è ovvio che si produca una figura di interferenza. Ma quando emettiamo un fotone alla volta e sullo schermo riveliamo un fotone alla volta abbiamo a che fare con oggetti singoli, discreti. Eppure vediamo ancora una volta la figura di interferenza. La giustificazione è la stessa che si era avuta nel caso dell'elettrone. Il fotone singolo, non disturbato, può essere sempre descritto da un'equazione simile all'equazione di Schrödinger²¹ e quindi da una funzione d'onda che può produrre interferenza.

7.3.1. La dualità onda-particella.

Nell'esperimento delle due fenditure abbiamo visto che il singolo elettrone, fra il corpo che lo emette e lo schermo che lo rivela, può essere descritto, a seconda di quale parte del tragitto stia percorrendo, come una particella localizzata o tramite una funzione d'onda (matematica) estesa nello spazio.

Questa ambiguità diventa ancora più palese quando si vuole studiare cosa succede ad un'onda e.m. (un'onda a tutti gli effetti) che, in alcuni casi, può essere descritta anche come una particella: il fotone, cioè il quanto del campo e.m.

Nella prima versione della MQ l'equazione di Schrödinger viene scritta solo per particelle non relativistiche con massa diversa da zero (e con spin nullo). Dopo qualche anno l'equazione verrà riscritta, modificata ed estesa a particelle relativistiche, con spin e/o con massa nulla, conglobando anche la descrizione dei fotoni. L'argomento è complesso, non ne parleremo, qui vogliamo considerare solo gli aspetti di onda/particella del comportamento di elettroni e di fotoni singoli.

Come abbiamo detto²² una particella elementare con massa m e quantità di moto p può essere descritta da una funzione d'onda (la soluzione dell'equazione di Schrödinger) che ha la forma matematica di una combinazione lineare di onde piane (cfr. esempio nella Fig. 7.5) in cui ognuna delle onde di cui è composta ha una lunghezza d'onda $\lambda = h/p$.

Se la particella di massa m interagisce con un qualunque oggetto fisico avremo il collasso della funzione d'onda, che da estesa diventa localizzata, la particella m assumerà una certa posizione ed una certa velocità, con delle indeterminazioni che hanno come limite inferiore il PdI di Heisenberg. In questa situazione la particella potrà essere descritta come una particella "standard", localizzata e classica.

Ecco due descrizioni limite per una particella con massa m che può essere descritta:

A. Come una particella libera, non localizzata: è descritta da una funzione d'onda ψ . La ψ è un'ampiezza di probabilità che ha la forma matematica e il comportamento di una somma di onde.

B. Come una particella localizzata interagente, o che ha appena interagito con un oggetto esterno: può essere descritta dalle variabili fisiche classiche. La massa m , la posizione x , la quantità di moto p , altre caratteristiche.

In ogni caso ed in ogni momento la particella dovrà rispettare il PdI di Heisenberg, quindi la particella ben localizzata avrà una velocità molto indeterminata...e così via.

Analogamente potremo descrivere con entrambe le caratteristiche il comportamento di un fotone, che sarà un campo e.m., quindi un'onda composta da un campo elettrico e da un campo magnetico,

²¹ Simile, ma non identica, l'equazione di Schrödinger non può essere scritta per particelle con massa 0 come il fotone, va quindi modificata; vedi § 7.2.4.

²² Vedi § 7.2.1

oppure una particella, il fotone appunto, considerato come il quanto dell'interazione e.m. e descrivibile da un'equazione tipo Schrödinger (l'estensione a particelle di massa nulla, ai fotoni).

Ecco due descrizioni limite per una particella con massa nulla (il fotone) che può essere descritta:

- A. Come un'onda e.m. funzione di un campo elettrico e di un campo magnetico che viaggiano nel vuoto con la velocità della luce e che può essere descritta da un'equazione tipo Schrödinger.
- B. Come una particella di massa $m=0$, Energia $E=hf$, quantità di moto $p=E/c$ e altre caratteristiche che, localmente, interagisce con un oggetto esterno scambiando Energia, quantità di moto ...

7.4. Come si utilizza la funzione d'onda, il gatto di Schrödinger e il tunneling quantistico

Nei paragrafi precedenti abbiamo mostrato le caratteristiche che stanno alla base della MQ ortodossa, dei principi relativi e del significato della funzione d'onda. Ora approfondiremo con un certo dettaglio alcune operazioni/esperimenti che utilizzando il formalismo quantistico, specie in relazione a sistemi descritti da un fotone singolo o da una coppia di fotoni. Questo per permetterci di discutere con cognizione di causa l'articolo di Einstein, Podolsky e Rosen che nel 1935 mise in dubbio la completezza della MQ e poi gli sviluppi venuti 40-50 anni dopo, che invece confermarono e completarono la (inaspettata) descrizione del nostro mondo data dalla MQ.

7.4.1. Come si lavora con la funzione d'onda: le misure sul sistema fisico relativo

Se abbiamo più possibilità [modalità] relative al verificarsi di un evento, per esempio se per un certo evento posso avere due modalità 1 e 2, indipendenti, ognuna descritta da una funzione d'onda ψ_1, ψ_2 , allora il sistema viene descritto da una funzione d'onda totale ψ_{tot} tale che:

$$\psi_{tot} = \psi_1 + \psi_2 \quad \text{e} \quad P_{tot}(r, t) = |\psi_{tot}|^2$$

Cioè:

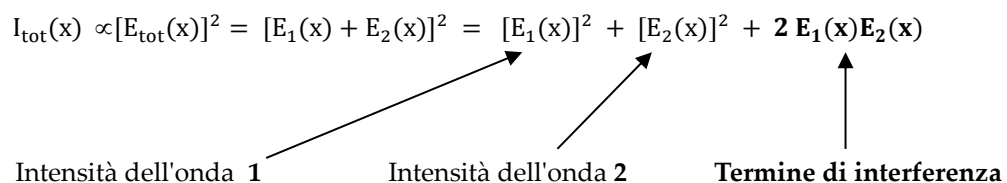
- PRIMA si sommano le ampiezze di probabilità per calcolare la ψ_{tot}
- POI si fa il modulo quadro della ψ_{tot} per avere la probabilità.

Questo procedimento è formalmente simile a quello che si ha per le onde, quando abbiamo due onde con la stessa frequenza che si sommano. Consideriamo la luce, cioè un'onda elettromagnetica, l'intensità luminosa massima in un punto x è proporzionale al quadrato del campo elettrico $E(x)$ in quel punto:

$$I(x) \propto E^2(x)$$

Se in un punto x arrivano due onde luminose 1 e 2 con la stessa frequenza, $E_1(x)$ e $E_2(x)$, l'intensità luminosa risultante si calcola prima sommando le ampiezze del campo elettrico risultante:

$E_{tot}(x) = E_1(x) + E_2(x)$, e poi calcolando l'intensità dal quadrato del campo elettrico totale.

$$I_{tot}(x) \propto [E_{tot}(x)]^2 = [E_1(x) + E_2(x)]^2 = [E_1(x)]^2 + [E_2(x)]^2 + 2 E_1(x) E_2(x)$$


Intensità dell'onda 1 Intensità dell'onda 2 Termine di interferenza

È il termine di interferenza che fa la differenza fra una somma di oggetti puntiformi o localizzati (due eventi che avvengono nello stesso luogo e che si sommano semplicemente, tipo due palline che

arrivano nello stesso luogo) e la somma di onde in cui c'è un termine di interferenza che può essere positivo, negativo o nullo.

Il termine di interferenza dipende dalla differenza di fase fra le due onde, cioè dalla differenza nel cammino percorso Δx : $2 E_1(x)E_2(x) = 2 E_1 E_2 \cos \delta$, dove la differenza di fase è: $\delta = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda}$. Si può vedere come la grandezza che conta è il rapporto fra Δx e la lunghezza d'onda λ . In Tab. 7.5 abbiamo calcolato l'intensità risultante per alcuni valori di Δx (0, $\lambda/4$, $\lambda/2$) a cui corrisponde una differenza di fase δ (0, 90° , 180°):

Δx	δ	$\cos \delta$	$2 E_1 E_2 \cos \delta$	I_{TOT} se $E_1=E_2$
0	0	1	$2 E_1 E_2$	$4E^2 = 4 I_0$
$\lambda/4$	90°	0	0	$2E^2 = 2 I_0$
$\lambda/2$	180°	-1	$-2 E_1 E_2$	0

Tab. 7.5 Intensità luminosa I_{TOT} risultante dalla somma di due onde luminose di intensità massima uguale $I_1 = I_2 = I_0$, i cui campi elettrici si sommano con fasi δ diverse, dovute per esempio ad una differenza di cammino Δx . L'intensità può essere, localmente, 4 volte quella di una delle due onde iniziali, oppure zero.

7.4.2. Il principio di sovrapposizione delle onde

Se un sistema fisico ha come soluzioni due onde $E_1(x, t)$, $E_2(x, t)$ allora anche lo stato:

$$E(x, t) = a_1 E_1 + a_2 E_2$$

sarà una soluzione del sistema, dove a_1 e a_2 sono due costanti arbitrarie.

La ragione è legata alla linearità delle equazioni che descrivono il sistema, è una proprietà matematica del sistema.

Esempio classico: se prendo una corda e vedo che posso farla vibrare alla frequenza f_1 con l'ampiezza: $A_1(t) = A_{10} \cos \omega_1 t$, oppure con alla frequenza f_2 con l'ampiezza: $A_2(t) = A_{20} \cos \omega_2 t$ allora posso farla vibrare anche con l'ampiezza:

$$A(t) = c_1 A_1(t) + c_2 A_2(t) = c_1 A_{10} \cos \omega_1 t + c_2 A_{20} \cos \omega_2 t$$

quindi anche la somma di soluzioni è una soluzione del sistema, e la frequenza sarà una combinazione delle due di partenza.

Questa proprietà funziona anche al contrario: se ho un sistema lineare descritto da una certa funzione (una oscillazione per esempio) posso scrivere la funzione che descrive il sistema come somma di due o più funzioni scomponendola in più modi di oscillazione. Nota: la scomposizione non è univoca, posso scegliere di fare la scomposizione in un numero infinito di funzioni parziali.

Questo principio si può applicare anche alle funzioni d'onda che descrivono lo stato di un sistema quantistico. Quindi:

- Se ho un sistema fisico descritto da due (o più) funzioni d'onda diverse ψ_1 e ψ_2 , corrispondenti a due diversi stati indipendenti del sistema, allora il sistema potrà essere descritto anche da una qualunque funzione d'onda che sia una combinazione lineare degli stati di partenza:

$$\psi = a_1 \cdot \psi_1 + a_2 \cdot \psi_2$$

Dove a_1 e a_2 sono due numeri, in genere complessi. Che il sistema possa essere descritto vuol dire che **può esistere** lo stato descritto dalla combinazione lineare, che poi io sia in grado di crearlo è un altro problema. Non è detto che lo sappia fare (sperimentalmente).

Questa caratteristica è una caratteristica molto importante, per nulla ovvia, che per esempio non si incontra nella fisica classica.

Supponiamo infatti di considerare una persona che si trova in una stanza con due porte, la porta A e la porta B e che vuole uscire. Potremo scrivere le funzioni (classiche) che corrispondono al fatto che la persona esce dalla porta A oppure che esce dalla porta B. Ma, in fisica classica, non potremo mai scrivere lo stato in cui la persona esce **sia** dalla porta A **che** dalla porta B: questo stato non esiste!

Mentre, per esempio, sempre classicamente, se emetto un'onda verso due fenditure, potremo avere che l'onda passa in parte dalla prima fenditura e in parte dalla seconda. E che dopo il passaggio le due onde si sommano per formare una sola funzione d'onda che è passata attraverso entrambe le fenditure. Che questo sia avvenuto me ne accorgo perché, per esempio, su di uno schermo vedrò una figura di interferenza. Questa proprietà è una caratteristica di tutti i sistemi descritti da un'onda, sia un'onda fisica classica (le onde nell'acqua, il suono, etc.) sia la funzione d'onda della Meccanica Quantistica.

7.4.3. Decomposizione spettrale. Luce polarizzata

In questo paragrafo e nei prossimi discuteremo in dettaglio cosa succede ad un sistema quantistico particolare, la luce polarizzata, che interagisce con uno strumento costruito per essere sensibile alla polarizzazione della luce.

La Polarizzazione della luce:

Un raggio di luce si dice polarizzato quando la direzione di oscillazione del campo elettrico ha una direzione che non varia nel tempo (l'asse di polarizzazione = \mathbf{e})

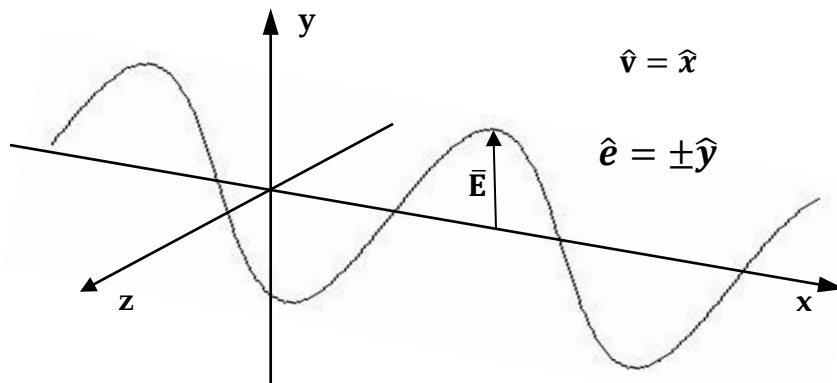


Fig. 7.15 Andamento del campo elettrico $\bar{\mathbf{E}}$ di un fascio di luce polarizzata che viaggia in direzione x , per un certo istante t . In questo caso la polarizzazione è verticale: \mathbf{e} è diretta secondo l'asse y .

Un polarizzatore (Analizzatore) è un elemento fisico, in genere piano, caratterizzato da una direzione particolare, la direzione del polarizzatore \mathbf{e}_p , che seleziona la luce che incide su di esso, facendola passare tutta, niente, o in parte.

Se il polarizzatore \mathbf{e}_p viene investito da luce polarizzata \mathbf{e}_i (\mathbf{e} in ingresso) abbiamo due casi limite:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_p & \quad \text{la luce passa tutta} & E_{\text{out}} = E_{\text{in}} \\ \mathbf{e}_i \perp \mathbf{e}_p & \quad \text{la luce non passa} & E_{\text{out}} = 0 \end{aligned}$$

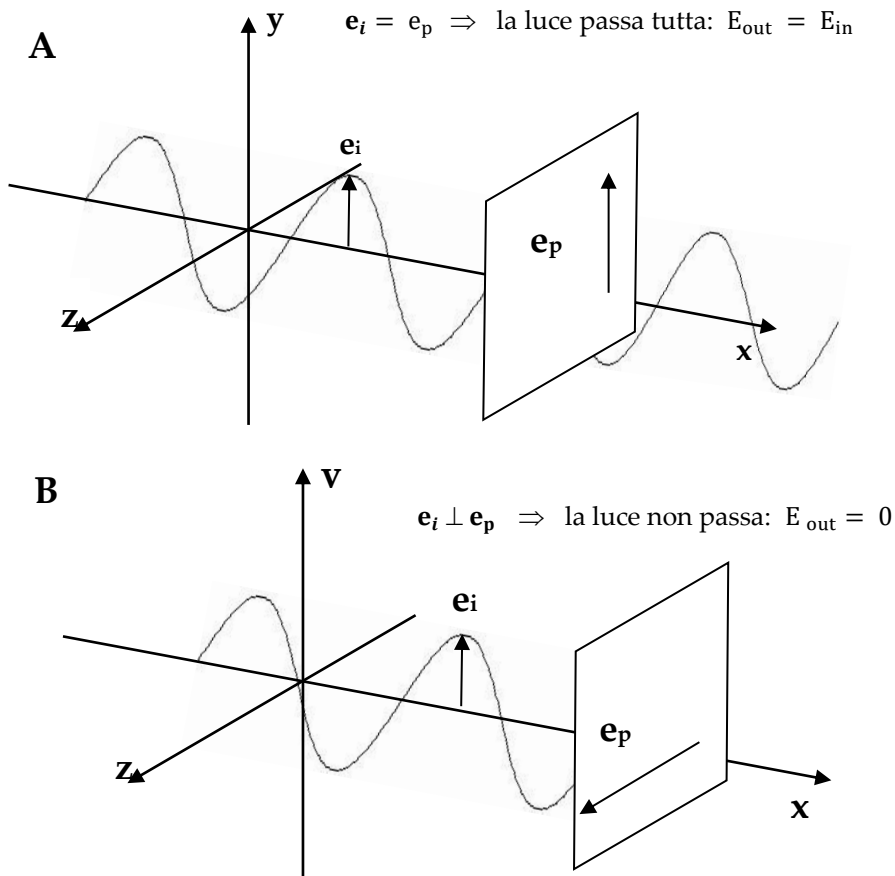


Fig. 7.16 I due casi limite per un raggio polarizzato che incide su di un polarizzatore. A) Se la direzione di polarizzazione \mathbf{e}_i è parallela al piano di polarizzazione del polarizzatore la luce passa tutta. B) Se la direzione di polarizzazione \mathbf{e}_i è perpendicolare al piano di polarizzazione la luce non passa.

Nel caso generale, in cui il polarizzatore faccia un angolo θ con il la polarizzazione del campo elettrico avremo che il campo elettrico in uscita dipende dal coseno dell'angolo fra le due direzioni.

$$[\hat{e}_i; \hat{e}_p] = \theta ; E_{out} = E_{in} \cos \theta ; I_{out} = I_{in} \cos^2 \theta$$

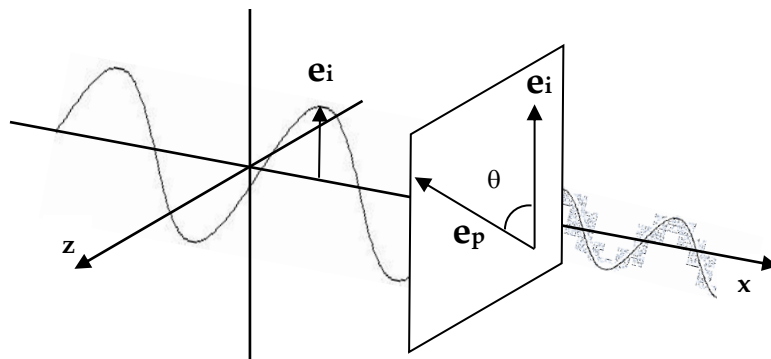


Fig. 7.17 Se il campo elettrico dell'onda incidente forma un angolo θ con la direzione del polarizzatore il campo elettrico in uscita sarà: $E_{out} = E_{in} \cos \theta$.

IMPORTANTE: il campo in uscita, più piccolo di quello in ingresso di un fattore $\cos^2 \theta$, ha polarizzazione \mathbf{e}_p .

Questo vuol dire che un polarizzatore agisce attivamente su di un raggio di luce, non solo variandone l'intensità, ma anche cambiandone la polarizzazione.

Supponiamo di inviare molta luce (tanti fotoni) al polarizzatore \mathbf{e}_p , e consideriamo tre casi particolari:

Direzione	θ	$\cos \theta$	$\cos^2 \theta$	intensità I_{OUT}
$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_p$	0	1	1	$I_{out} = I_{in}$
$\mathbf{e}_i \perp \mathbf{e}_p$	90°	0	0	$I_{out} = 0$
$\mathbf{e}_i \angle \mathbf{e}_p$	45°	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	$I_{out} = I_{in}/2$

Tab. 7.6 Intensità della luce in uscita da un polarizzatore con direzione \mathbf{e}_p per tre direzioni particolari per la polarizzazione \mathbf{e}_i della luce in entrata.

Quindi se mandiamo tanti fotoni (N), e se $\theta = 45^\circ$ avremo che $I_{out} = \frac{I_{in}}{2}$ cioè:

- Una frazione $N/2$ dei fotoni passa.
- Una frazione $N/2$ dei fotoni non passa.

Ma cosa succede se la luce è talmente debole che al polarizzatore arriva un fotone alla volta di una luce con direzione di polarizzazione $\theta = 45^\circ$?

Se la luce è "tanta" (se ho molti fotoni) l'intensità in uscita è semplicemente la metà di quella in ingresso, ma se ho un solo fotone per volta, non può passare mezzo fotone!

Quello che succede, e la relativa "spiegazione" è data dall'interpretazione ortodossa della meccanica quantistica.

7.4.4. Un fotone più un polarizzatore: l'interpretazione della MQ

Ogni dispositivo di misura può dare solo alcuni risultati determinati (*autovalori*).

Nel caso del polarizzatore si hanno due soli risultati possibili:

- 1) Il fotone passa,
- 2) Il fotone non passa,

Si noti che non esistono altre possibilità, le due elencate sopra esauriscono tutti i casi possibili.

Ad ognuno dei due risultati possibili (passa; non passa) corrisponde un *autostato* del sistema fisico da esaminare (in questo caso del fotone). L'autostato è quello stato del sistema fisico in ingresso a cui corrisponde un risultato certo dell'interazione con lo strumento che sta analizzando il sistema.

Esempio: Ho un polarizzatore con polarizzazione $\mathbf{e}_p = \mathbf{y}$

- I due autovalori, per un fotone incidente, sono "passa"; "non passa"

- Se l'autostato del fotone è $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_p = \mathbf{y} \Rightarrow$ ho l'autovalore "passa".

- Se l'autostato del fotone è $\mathbf{e}_i \perp \mathbf{e}_p = \mathbf{y} \Rightarrow$ ho l'autovalore "non passa".

- Se il sistema in esame è in un *autostato* sappiamo con *certezza* il risultato della misura.
- Altrimenti possiamo sapere solo la probabilità di ottenere un certo risultato.

- Come si fa a calcolare la probabilità di ottenere un certo risultato?

Scomponiamo lo stato del sistema in una combinazione lineare degli autostati del sistema di misura. Vediamo come si applica al caso di un fotone con polarizzazione \mathbf{e}_i e di una misura fatta con un polarizzatore \mathbf{e}_p .

Scompongo la direzione \mathbf{e}_i del fotone secondo due assi y, z (è quella che si chiama decomposizione spettrale):

$$\Rightarrow \mathbf{e}_i = e_y \cos\theta + e_z \sin\theta$$

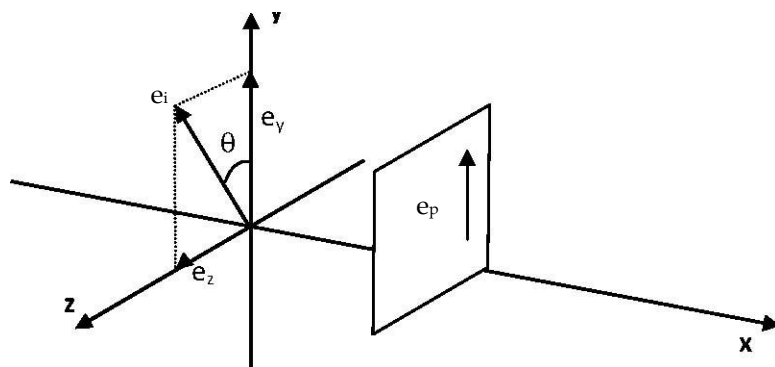


Fig. 7.18 Scomposizione del campo in ingresso \mathbf{e}_i , diretto secondo un angolo θ , in due componenti ortogonali \mathbf{e}_y e \mathbf{e}_z . La geometria reale è leggermente diversa rispetto al disegno: \mathbf{e}_y e \mathbf{e}_z sono direzioni, quindi vettori unitari, la loro lunghezza deve essere sempre 1.

La probabilità di ottenere un certo risultato (che deve essere uno degli autovalori) è proporzionale al modulo quadro del coefficiente del rispettivo autostato. Sia $e_p = \mathbf{y}$ e $\mathbf{e}_i = \cos\theta \cdot e_y + \sin\theta \cdot e_z$

Cosa passa? Passa l'autostato \mathbf{e}_y , il coefficiente è $\cos\theta$, la probabilità di ottenere che passi è $\cos^2\theta$.

Se ho, per esempio, $\theta=45^\circ$, allora $\cos^2\theta = \frac{1}{2}$, cioè passa 1 fotone ogni 2.

Il risultato è che il fotone, che aveva polarizzazione \mathbf{e}_i , passa o non passa con probabilità del 50%.

- Cosa succede e cosa è successo (secondo la MQ)

❖ Il fotone che passa (*tutti* i fotoni che passano) risulta polarizzato secondo la direzione del polarizzatore \mathbf{e}_p

❖ C'è stato un brusco cambiamento nello stato dei fotoni che sono passati: $\mathbf{e}_i \rightarrow \mathbf{e}_p$. È il cosiddetto "collasso" della funzione d'onda del sistema. Se avessi scelto un polarizzatore con un asse di polarizzazione diverso, il fotone in uscita sarebbe stato diverso.

❖ Il misuratore (l'interazione del sistema quantistico con il sistema "esterno") *cambia* il sistema fisico.

❖ Le probabilità (a priori) si realizzano in un risultato *certo*.

❖ La misura modifica il sistema in esame. Non è solo un disturbo casuale.

In generale se ho un sistema fisico descritto da una funzione d'onda $\psi(r,t)$, e lo voglio "misurare", oppure se voglio sapere cosa succede se interagisce con un sistema esterno (lo "strumento"), devo scrivere il sistema fisico di partenza scomponendolo in tutti i possibili risultati dovuti all'interazione con lo strumento che fa la misura.

PRIMA della misura: $\psi(r,t) = c_a \psi_a(r) + c_b \psi_b(r) + c_c \psi_c(r)$

Questo vuol dire che avremo la probabilità $|c_a|^2$ di ottenere $\psi_a(r)$, la probabilità $|c_b|^2$ di ottenere $\psi_b(r)$, etc.

DOPO la misura: se ho ottenuto $\psi_a(r) \Rightarrow \psi'(r,t) = \psi_a(r)$

Per una simulazione vedi il sito PHET: <http://phet.colorado.edu/> : \rightarrow Simulations \rightarrow Physics \rightarrow Wave Interference \rightarrow *Quantum tunnelling and wave packet*

7.4.5. Il gatto di Schrödinger

Il gatto di Schrödinger è un esperimento ideale citato per la prima volta da Schrödinger in un suo famoso lavoro (Schrödinger, 1935), in cui si discute fra l'altro dell'applicazione ad un sistema macroscopico della sovrapposizione delle funzioni d'onda e del formalismo quantistico.

Del gatto di Schrödinger se ne parla in innumerevoli articoli talvolta in modo ingenuo, talvolta con analisi molto approfondite. Ma vale la pena di riportare quanto scritto dallo stesso Schrödinger nel suo articolo del 1935.

"Si possono costruire anche casi burleschi. Si chiude un gatto in una camera blindata..."

L'esperimento del gatto dallo stesso Schrödinger viene quindi presentato come un caso "burlesco" (in altre traduzioni "ridicolo") in cui si fanno delle indebite generalizzazioni dei comportamenti dei corpi microscopici ai corpi macroscopici.

Ecco in breve l'esperimento (mentale!) proposto da Schrödinger.

Abbiamo un gatto rinchiuso in una scatola blindata. Dentro la scatola c'è una fiala di gas velenoso, un martello comandato da un meccanismo che rivela particella radioattive, ed una sorgente radioattiva di fronte al rivelatore. Quando il materiale radioattivo ha un decadimento viene emessa una particella che viene rivelata dal rivelatore. Il rivelatore a questo punto scatta, comanda il martello che rompe la fiala di gas velenoso che si spande nell'aria e in pochi secondi uccide il gatto.

La sorgente è tale che la probabilità di decadimento del materiale radioattivo è del 50% ogni ora.

Quindi dopo ogni ora ho il 50% di probabilità che ci sia stato un decadimento. Dopo un'ora: come sarà l'atomo? Come sarà la fiala? Come sarà il gatto?

Secondo la MQ dopo un'ora, se non ho interagito con il sistema, quindi se non l'ho guardato, la funzione d'onda che descrive il sistema si scrive come la sovrapposizione delle due funzioni d'onda che descrivono le due possibilità

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \psi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \psi(\text{vivo}) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \psi(\text{morto})$$

Dopo un'ora: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Materiale decaduto} \rightarrow \text{fiala rotta} \rightarrow \text{gatto avvelenato, morto: } \psi = \psi(1) \\ \text{Materiale non decaduto} \rightarrow \text{fiala sana} \rightarrow \text{gatto sano, vivo: } \psi = \psi(2) \end{array} \right.$

Ed il sistema collasserebbe in uno dei due stati possibili solo all'apertura della scatola. Come se fossi io a determinare se il gatto sia vivo o sia morto.

La cosa può apparire banalmente ridicola, ma anche profondamente sottile. Vale la pena di riportare la conclusione di Schrödinger (Schrödinger, 1935):

"Ciò che è tipico in questi casi è che un'indeterminazione originariamente limitata a livello atomico, si traduce in indeterminazione palpabile che può essere risolta con l'osservazione diretta. Questo ci impedisce di far valere ingenuamente un modello vago come immagine della realtà. In sé, esso non conterrebbe niente di poco chiaro o di contraddittorio. C'è differenza tra una fotografia mossa o sfocata e una che ritrae nuvole e lembi di nebbia"

La "soluzione" semplice al problema è questa: ogni oggetto macroscopico - e con questo intendiamo un oggetto che si trova ad una certa temperatura, è in contatto termico con l'ambiente -. Quindi viene continuamente "osservato" da miliardi di miliardi di fotoni al secondo. E anche tutte le sue molecole interagiscono una con l'altra miliardi di volte al secondo. Tutti questi eventi non sono altro che "osservazioni" fatte sui singoli atomi del sistema. Anche supponendo di avere costruito un sistema macroscopico (il gatto) in una condizione tale da essere descritto da una precisa funzione d'onda, quello che succede è che la sua funzione d'onda collaserà in tempi dell'ordine di miliardesimi di secondo - è il fenomeno della decoerenza quantistica. Quindi quello che succede è che il sistema atomico è genuinamente quantistico ed emetterà in media una particella ogni due ore secondo le regole casuali del decadimento radioattivo. Ma il gatto sarà continuamente in uno stato ben definito, prima vivo, poi, nel caso fosse avvenuto un decadimento (disgraziatamente) morto.

7.4.6. Il tunneling quantistico

In MQ esiste un effetto inesistente nella Meccanica Classica: il cosiddetto tunneling quantistico.

Supponiamo di avere un sistema, la solita particella con massa m in presenza della forza di gravità, che si può muovere in una sola direzione orizzontale, per esempio lungo l'asse x e che ad un certo istante si trova di fronte ad una barriera, un ostacolo di altezza h . La Meccanica Classica dice che la particella potrà superare la barriera se avrà una energia cinetica maggiore o uguale all'energia potenziale necessaria per superare la barriera. Se l'energia cinetica della particella sarà troppo piccola, cioè se la particella non è abbastanza veloce allora rimbalzerà all'indietro (in realtà quello che succede può dipendere anche dalla forma della barriera, qua supponiamo che la forma della barriera sia tale da non influire sul passaggio o meno della particella). In formule:

$$E(\text{cinetica}) \geq E(\text{potenziale}) \quad \text{quindi} \quad \frac{1}{2}mv^2 \geq mgh \quad \text{cioè} \quad v \geq \sqrt{2gh}$$

In MQ questo semplice "esperimento" può avvenire in modo completamente diverso.

Quello che succede è che, anche se la particella ha un'energia minore dell'energia potenziale necessaria per superare la barriera, l'equazione di Schrödinger prevede che ci sarà una certa probabilità che la particella superi la barriera e una certa probabilità che la particella rimbalzi all'indietro. Questo "superamento" della barriera avviene con una modalità molto particolare. La particella non passa *sopra* la barriera, non potrebbe, non ha l'energia sufficiente. Quello che succede è appunto l'effetto "tunnel": ad un certo istante la particella si trova, per esempio, a sinistra della barriera, la urta, e istantaneamente può trovarsi a destra della barriera.

Questo fatto è abbastanza incredibile, eppure sta alla base delle reazioni nucleari che avvengono all'interno del Sole (la fusione nucleare avviene tramite un meccanismo di questo tipo), e in molti componenti elettronici che si trovano negli oggetti di uso comune (cellulari, TV, telecomandi, ...). Quindi non stiamo parlando di un fenomeno ideale, in pratica impossibile, ma di un fenomeno reale della natura e che possiamo ricreare artificialmente.

Con il che ci si potrebbe chiedere: ma allora questo può succedere sempre? Io potrei andare a sbattere contro un muro e in qualche caso trovarmi dall'altra parte per effetto tunnel? Ecco, qua entrano in gioco i numeri, si può fare il calcolo della probabilità che l'effetto tunnel avvenga per un oggetto

macroscopico: il risultato è che questa probabilità è praticamente zero. Questo vuol dire che, anche se provassi ad andare contro un muro per una volta al secondo, non basterebbero miliardi di miliardi di volte l'età dell'universo per avere la probabilità che accada una volta: è il cosiddetto evento impossibile. Se andate contro un muro vi fate male, tutto qui, non sperate di trovarvi dall'altra parte.

Simulazione di una funzione d'onda e dell'effetto tunnel su PHET: <http://phet.colorado.edu/> .

→ Simulations → Physics → *Quantum tunnelling and wave packet*

7.5. L'articolo di Einstein, Podolsky e Rosen: la Meccanica Quantistica è incompleta

Il 25 marzo 1935 A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen (EPR) pubblicano un articolo dal titolo:

La descrizione della Realtà della Meccanica Quantistica può considerarsi completa?

Si tratta di uno degli articoli più importanti di tutta la MQ, e probabilmente di tutta la fisica moderna (Einstein, Podolski, & Rosen, 1935).

Il punto sottolineato dagli autori, in breve, è questo:

- La MQ dice: la descrizione della realtà avviene tramite la funzione d'onda, che rappresenta TUTTA l'informazione che si può avere su di un sistema.
- Tramite un esperimento mentale su di un sistema particolare EPR dimostrano che la funzione d'onda non descrive completamente le proprietà del sistema in esame.
- Quindi nella descrizione del sistema manca qualcosa che la MQ non può descrivere. Quindi la MQ non è una teoria completa.

È abbastanza chiaro che questo è un attacco degli autori alla probabilità intrinseca legata alle previsioni della MQ. L'idea di Einstein, da sempre, era che la descrizione probabilistica della realtà non fosse quella "vera", che in realtà le previsioni probabilistiche date dalla MQ fossero epistemiche, cioè legate alla nostra ignoranza di qualche aspetto della realtà. E che prima o poi si sarebbe arrivati ad una descrizione causale, non probabilistica del mondo che ci circonda. Ecco cosa scriveva Einstein a Bohr nel 1926:

"La meccanica quantistica esige molta attenzione. Ma una voce interiore mi suggerisce che non è ancora la cosa reale. La teoria offre molto, ma difficilmente ci avvicina al segreto del grande vecchio. In ogni caso, io sono convinto che *Lui* non giochi a dadi." (Born, Born, & Einstein, 1973).

Ora vediamo di chiarire il significato dell'esperimento EPR, e di come la *soluzione* sia stata trovata solo nel 1982, confermando la completezza della MQ, e stravolgendo ulteriormente la nostra idea di realtà.

Ne vedremo una versione elementare, la versione 0, e poi descriveremo in dettaglio gli aspetti più delicati del problema.

La versione 0: (fin troppo facile, in realtà non chiarisce le proprietà dei sistemi "entangled").

1) Consideriamo un sistema fisico composto da due sistemi [A, B] "opportunitamente preparati" e separiamoli portandoli a grande distanza (d). La preparazione è tale che la misura di alcune proprietà su di uno dei due sistemi fornisce lo stesso valore se misurato sul secondo²³.

2) Misuriamo una certa proprietà P(A) al tempo t*. La misura inizia a t* e finisce a t* + dt; la distanza d è tale che $t_c(d) = \frac{d}{c} \gg dt$, cioè la luce, nel tempo dt, non può arrivare da A a B.

3) Sapremo quindi con certezza il valore della stessa proprietà P(B) al tempo t* + dt.

²³ Stiamo parlando dei sistemi "entangled", li vedremo in dettaglio nel paragrafo 7.5.4.

- 4) Dato che non c'è stato il tempo di comunicare a B il risultato di A, se ne deduce che B possedeva quella proprietà prima dell'istante $t^* + dt$.
- 5) Ma la MQ ci fornisce solo la probabilità di avere un certo risultato per P(B) al tempo $t^* + dt$.
- 6) Quindi c'è un elemento di realtà che la teoria non può prevedere.
- 7) Quindi la teoria è incompleta.

7.5.1. La notazione di Dirac

Per discutere con qualche dettaglio l'esperimento EPR, senza dover utilizzare il formalismo completo della MQ con i relativi calcoli, è utile introdurre la notazione di Dirac che, oltre a permettere la visualizzazione ed il calcolo di alcuni risultati, può risultare particolarmente semplice.

Partiamo dal fatto che, secondo la MQ, ogni sistema fisico è descritto dalla relativa funzione d'onda $\psi(r, t)$. Consideriamo ora un generico stato ψ ottenuto dalla combinazione di due stati ψ_1 e ψ_2 ognuno dei quali rappresenta uno stato diverso [per esempio $\psi_1 = "V"$ può essere lo stato di un fotone con polarizzazione Verticale, cioè un fotone che ha il 100% di probabilità di passare un test di polarizzazione verticale, e $\psi_2 = "O"$ lo stato di un fotone con polarizzazione Orizzontale, cioè un fotone che ha il 100% di probabilità di passare un test di polarizzazione orizzontale]:

$$\psi = a_1 \psi_1 + a_2 \psi_2$$

Dove le probabilità di ottenere lo stato ψ_1 o ψ_2 in una misura sono, rispettivamente:

$$P_1 = P(\psi_1) = [a_1]^2 \quad \text{e} \quad P_2 = P(\psi_2) = [a_2]^2$$

La notazione di Dirac è la seguente:

Il simbolo $|\dots\rangle$ rappresenta lo stato di un sistema ψ . Questo è un sistema tale che, se supponiamo di sottoporre lo stato ad una certa misura che ha solo due possibili risultati, possiamo scrivere lo stato ψ come somma dei due stati (risultati possibili) diversi: $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$.

I fattori a_1 (a_2) sono i coefficienti che determinano la probabilità di ottenere lo stato ψ_1 (ψ_2)

$$|\psi\rangle = a_1 |\psi_1\rangle + a_2 |\psi_2\rangle$$

Le $|\psi\rangle$ sono le funzioni d'onda che descrivono gli stati. Notare che ψ_1 e ψ_2 corrispondono ai due soli risultati possibili di una eventuale misura.

Facciamo un esempio con dei fotoni inviati ad un polarizzatore.

Se consideriamo il caso di un fotone polarizzato V = Verticalmente (O = Orizzontalmente), possiamo scrivere lo stato del fotone così:

$|V\rangle$: è lo stato di un di un fotone che passa al 100% un test con un polarizzatore Verticale.

$|O\rangle$: è lo stato di un di un fotone che passa al 100% un test con un polarizzatore Orizzontale.

Nel caso di un fascio di luce (un fotone) con polarizzazione a 45° , possiamo scomporre lo stato secondo due qualunque direzioni ortogonali, per esempio (V,O) e scrivere (principio di linearità):

$$|\psi\rangle = |45^\circ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |V\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |O\rangle$$

dove i fattori $\frac{1}{\sqrt{2}}$ servono ad assicurare che la probabilità totale che il fotone “passi” il test o che “non passi” il test sia **1**, cioè sia lo stato “certo” [sono sicuro che il fotone o passa il test o non lo passa, non ho altre possibilità].

Infatti ho:

$$P(|45^\circ\rangle \text{ passi } V) = P(V) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^2 = \frac{1}{2} = 50\%$$

$$P(|45^\circ\rangle \text{ passi } O) = P(O) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^2 = \frac{1}{2} = 50\%$$

Mentre:

$$P(|45^\circ\rangle \text{ passi } 45^\circ) = P(45^\circ) = [1]^2 = 1 = 100\%$$

Si noti che il fotone a 45° ha il 100% di probabilità di passare il test a 45° , quindi il fotone “possiede oggettivamente” la proprietà di avere una certa polarizzazione (cfr. definizione di Einstein nell’EPR)

7.5.2. L’esperienza EPR

La trattazione segue come schema la discussione dell’esperienza EPR fatta da G. C. Ghirardi nel bellissimo libro “Un’occhiata alle carte di Dio” (Ghirardi, 2015). Queste poche pagine sono una minima traccia del discorso logico, si consiglia di leggere il testo di G.C. Ghirardi per le molte ed approfondite discussioni dei punti chiave e delle sottigliezze legate al paradosso EPR.

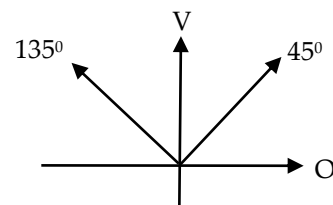
7.5.3. Stati fattorizzati

Nel grafico sono indicate le direzioni delle due coppie di assi relativi alla polarizzazione dei fotoni o dei polarizzatori che verranno utilizzati in seguito.

Considereremo due coppie di assi ortogonali:

- 1) La coppia (V, O): Verticale a 90° , Orizzontale a 0° .
- 2) La coppia (V,O) ruotata di 45° : le diagonali a 45° e a 135° .

Nota: gli assi devono essere ortogonali perché così mi riduco a due casi (strumenti di misura) in cui un risultato esclude l’altro e i due risultati comprendono tutte le possibilità.



Consideriamo una sorgente **S** che, opportunamente eccitata, emetta **due fotoni indipendenti 1 e 2**, uno con polarizzazione verticale **V** e l’altro con polarizzazione orizzontale **O**.

Gli stati dei due fotoni possono essere scritti come:

$$|\psi_1\rangle = |1, V\rangle \text{ e } |\psi_2\rangle = |2, O\rangle$$

E lo stato totale dei due fotoni possiamo scriverlo come:

$$|\psi\rangle = |1, V\rangle \cdot |2, O\rangle \quad [\text{nota: il prodotto “\cdot” vuol dire che i due fotoni sono indipendenti}]$$

Ecco cosa succede se facciamo tre test di polarizzazione sui due fotoni, cambiando l’asse di polarizzazione di uno dei polarizzatori.

S è la sorgente; **|1, x>** e **|2, y>** sono i due fotoni emessi dalla sorgente; **P(O)**, **P(V)** e **P(45°)** sono i polarizzatori con l’asse di polarizzazione diretto rispettivamente **Orizzontalmente**, **Verticalmente** o a **45°**. I fotoni incidono ognuno su di un polarizzatore. Il polarizzatore a sinistra, quello che analizza il fotone **2** ha sempre la stessa polarizzazione (**O**). Il polarizzatore a destra, quello che analizza il fotone **1**, cambia invece orientazione (**V**, **O**, **45°**). Il risultato è quello in tabella:

Risultato sul fotone 2	Polarizzatore	Sorgente di 2 fotoni	Polarizzatore	Risultato sul fotone 1
[passa al 100%]	← P(O)	2,O> ← S → 1,V>	P(V) →	[passa al 100%]
[passa al 100%]	← P(O)	2,O> ← S → 1,V>	P(O) →	[NON passa al 100%]
[passa al 100%]	← P(O)	2,O> ← S → 1,V>	P(45°) →	[passa al 50%] [NON passa al 50%]

Intanto va notato che, mentre il risultato del fotone 2 è sempre lo stesso (ho lo stesso tipo di fotone inviato sullo stesso polarizzatore), il risultato del fotone 1 cambia, avendo cambiato il polarizzatore. I due fotoni sono effettivamente indipendenti e così i risultati delle misure fatti su di essi.

Si ricorda che il risultato della misura: "passa al 50%" sta a significare che la probabilità che passi sarà il 50%, quindi se, per esempio, ripeto la misura 100 volte, avremo che "in media" passerà 50 volte. Se faccio una sola misura avremo la probabilità del 50% che il fotone passi o che non passi, quindi sul risultato della singola misura non possiamo fare previsioni certe.

Perché nel terzo caso il fotone |1,V> passa o non passa al 50%? Vediamo il calcolo dettagliato.

Scomponiamo lo stato |1,V> secondo le due direzioni 45° e 135° :

$$|1,V\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1,45^\circ\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1,135^\circ\rangle$$

Inseriamo a questo punto questa espressione per il fotone 1 nell'espressione di tutta la funzione d'onda, che comprende sia il fotone 1 che il fotone 2 otteniamo:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1,45^\circ\rangle \cdot |2,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1,135^\circ\rangle \cdot |2,0\rangle$$

Questo è un altro modo di scrivere lo stato di partenza dei due fotoni. Se ora facciamo un test con il polarizzatore a 45° sul fotone 1, avremo che **il fotone 1 passerà il test a 45°** ...

Prima della misura: $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1,45^\circ\rangle \cdot |2,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1,135^\circ\rangle \cdot |2,0\rangle$

...con la probabilità di $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^2 = \frac{1}{2} = 50^\circ$

È importante capire cosa succede **dopo** la misura.

Se il fotone supera il test (e questo avviene con la probabilità del 50%), subito dopo la misura, quindi all'uscita del polarizzatore, avremo avuto il collasso della funzione d'onda nello stato di uscita, il fotone avrà acquisito con certezza la polarizzazione a 45°, e la funzione d'onda sarà diventata:

Dopo la misura: $|\psi\rangle = |1,45^\circ\rangle \cdot |2,0\rangle$

cioè, essendo il fotone 1 a 45°, non ho più la parte di $|\psi\rangle$ che descriveva lo stato del fotone 1 a 135°. Mentre è rimasta la parte che descriveva il fotone 2, che infatti, essendo Orizzontale, passerà al 100% un test con un polarizzatore Orizzontale.

7.5.4. Stati entangled

Analogamente a quanto fatto nel paragrafo precedente, in cui avevamo uno stato con un fotone **O** ed uno **V**, possiamo creare i due seguenti stati, uno stato $|\Phi\rangle$ con i due fotoni entrambi $|\mathbf{V}\rangle$ ed un altro $|\Lambda\rangle$ con i due fotoni entrambi $|\mathbf{O}\rangle$:

$$|\Phi\rangle = |1, \mathbf{V}\rangle \cdot |2, \mathbf{V}\rangle \quad |\Lambda\rangle = |1, \mathbf{O}\rangle \cdot |2, \mathbf{O}\rangle$$

Ora creiamo lo stato somma (cioè la sovrapposizione lineare) dei due precedenti²⁴:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\Phi\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\Lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, \mathbf{V}\rangle \cdot |2, \mathbf{V}\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, \mathbf{O}\rangle \cdot |2, \mathbf{O}\rangle)$$

Lo stato $|\psi\rangle$ che abbiamo creato viene chiamato stato “**entangled**”, in italiano *interlacciato*, ed ha una serie di proprietà molto particolari:

Supponiamo di sottoporre lo stato $|\psi\rangle$ ad un test di polarizzazione Verticale sul fotone 1: il fotone 1 ha il 50% di probabilità di passare il test Verticale.

Lo stesso risultato (50%) si avrebbe se facessimo un test di polarizzazione Orizzontale sul fotone 1, o un test di polarizzazione Orizzontale o Verticale sul fotone 2. Avremmo sempre una probabilità del 50% di passarli.

Supponiamo ora di voler fare un test, sempre sullo stato $|\psi\rangle$, con un polarizzatore a 45° oppure a 135° (direzioni ortogonali fra loro). Servono un po' di calcoli, gli stati dei due fotoni entangled vanno scomposti secondo le nuove direzioni: il risultato è che possiamo scrivere lo stato $|\psi\rangle$, *lo stesso di prima*, come:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|1, 45^\circ\rangle \cdot |2, 45^\circ\rangle + |1, 135^\circ\rangle \cdot |2, 135^\circ\rangle]$$

Si vede che, analogamente al caso precedente, la probabilità di passare un test a 45° oppure a 135° è sempre del 50% sia per il fotone 1 che per il fotone 2:

$$P_1(45^\circ) = P_2(45^\circ) = 50\%$$

$$P_1(135^\circ) = P_2(135^\circ) = 50\%$$

Questo ragionamento, fatto per le due direzioni (O,V)=($0^\circ, 90^\circ$) e poi per le due direzioni ($45^\circ, 135^\circ$), vale per qualunque altra coppia di direzioni ortogonali: ($20^\circ, 110^\circ$), ($30^\circ, 120^\circ$), ($110^\circ, 200^\circ$), vale quindi per qualunque angolo della polarizzazione iniziale, l'altro essendo a 90° dal primo.

...cioè ognuno dei due fotoni ha una Probabilità $P = \frac{1}{2} = 50\%$ di passare un test lungo una qualsiasi direzione arbitraria: **SEMPRE**.

⇒ **Non esiste alcuna direzione in cui la Polarizzazione possa essere prevista con certezza.**

⇒ **Ma in ogni caso il risultato ottenuto per qualunque test è lo stesso per tutti e due i fotoni.**

²⁴ Per ora non ci preoccupiamo di sapere come fare a creare questo stato. Sappiamo che per il principio di sovrapposizione questo stato può esistere e per ora ci basta. Poi si vedranno i problemi nel realizzare sperimentalmente quanto scritto.

Il termine “entangled” sta appunto a significare questa caratteristica di “interlacciamento” fra due fotoni, ben differente dai due fotoni fattorizzati incontrati precedentemente, in cui entrambi si comportavano indipendentemente da quanto avveniva all’altro fotone.

Se facciamo un test di polarizzazione sul fotone **1** lungo una qualsiasi direzione **n**(arbitraria), e se supponiamo che il fotone passi il test, otteniamo in uscita lo stato:

$$|\psi\rangle = |1, n\rangle \cdot |2, n\rangle$$

Quindi dopo la misura sul fotone **1** (supponendo che abbia passato il test “**n**”, e questo avviene nel 50% dei casi) abbiamo che il fotone **2** ha “acquisito” la polarizzazione **n**, cioè siamo sicuri, (abbiamo una probabilità del 100%) che il fotone passerà un test di polarizzazione secondo **n**.

Il punto essenziale dello stato entangled è questo:

- Prima di ogni misura possiamo solo dire che avremo il 50% di probabilità di passare un qualunque test di polarizzazione secondo una qualunque direzione **n**. Prima della misura, nello stato entangled, i fotoni NON hanno la proprietà “Polarizzazione”, cioè non esiste nessuna direzione per cui possiamo prevedere con certezza il risultato (cfr. la definizione di *Realismo*, § 7.5.5)

- Dopo una misura (secondo la direzione **n**) avremo il 100% di probabilità di passare lo stesso test sia per il fotone misurato che per l’altro. I due fotoni avranno entrambi acquisito la proprietà di essere polarizzati secondo la direzione **n**.

7.5.5. La dimostrazione di Einstein, Podolski e Rosen dell’incompletezza della MQ

Le definizioni/premesse dell’articolo EPR (Einstein, Podolski, & Rosen, 1935).

1. *Realismo: se, senza disturbare in alcun modo un sistema, è possibile prevedere con certezza il risultato di una misura di un’osservabile del sistema, allora esiste un elemento di realtà associato all’osservabile in questione, o equivalentemente il sistema “possiede oggettivamente” (per oggettivamente si intende: indipendente da qualunque osservatore e dal fatto che la misura in questione venga fatta oppure no) la relativa proprietà.*

2. *Località Einsteiniana: gli elementi di realtà fisica posseduti oggettivamente da un sistema non possono venire influenzati istantaneamente a distanza.*

Questo vuol dire che qualunque segnale deve trasmettersi a velocità non superiore a quella della luce, la trasmissione “istantanea” di una informazione è impossibile. Per segnale si intende una informazione che modifica un elemento di realtà fisica. Ed una informazione, secondo la Relatività Speciale, può viaggiare al massimo alla velocità della luce.

✧ **Nell’articolo EPR gli autori assumono l’ipotesi di località per tutti i processi fisici.**

L’argomento EPR è il seguente:

1. Assumiamo uno stato composto da due fotoni entangled come nella:

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [|1, V\rangle \cdot |2, V\rangle + |1, 0\rangle \cdot |2, 0\rangle]$$

2. Facciamo viaggiare i due fotoni in direzioni opposte per un tempo t^* . Al tempo t^* si troveranno: il fotone 1 in A, il fotone 2 in B. La distanza $AB = d$ sia molto maggiore di $c dt^*$.

3. Eseguiamo, al tempo t^* e nel punto A, un test di polarizzazione sul fotone **1** con un polarizzatore verticale = **V**. Se il fotone passa il test, allora un istante dt dopo lo stato del sistema sarà:

$$\psi(t^* + dt) = |1, V\rangle \cdot |2, V\rangle$$

4. Quindi l'osservatore in **A**, solidale con il polarizzatore, potrà prevedere con certezza, senza disturbarlo, che il fotone **2** passerà un test di polarizzazione verticale con la probabilità del 100%, quindi con certezza, se facessi una misura in **B** al tempo $t^* + dt$.
5. Quindi il fotone **2** ha un elemento di realtà fisica, la polarizzazione V (cfr. definizione di realismo), che non aveva prima dell'istante t^* .
6. Ma, per l'ipotesi di località, la misura in **A** non può aver influito sul fotone **2** (anche se **A** avesse inviato un segnale a **B** alla velocità della luce, il segnale non avrebbe fatto in tempo ad arrivare a **B**), quindi il fotone **2** possedeva questa proprietà anche prima della misura fatta all'istante t^* , indipendentemente dalla misura fatta sul fotone **1**.
7. Quindi c'è un elemento di realtà che la teoria non è in grado di descrivere.
8. Quindi la teoria è incompleta.

7.5.6. L' EPR, alcuni commenti dei protagonisti

Riportiamo qui alcuni commenti della comunità scientifica all'articolo EPR estratti dal libro di G. C. Ghirardi in cui viene fatta un'analisi più completa ed approfondita (Ghirardi, *Un'occhiata alle carte di Dio*, 2015, p. 161-168).

N. Bohr: "... l'enunciato del criterio in questione risulta ambiguo per quanto concerne l'espressione "senza disturbare in alcun modo il sistema". Naturalmente, nel caso in esame non può in alcun modo invocarsi un disturbo meccanico del sistema in esame nell'ultimo stadio cruciale del processo di misura. Ma anche a questo stadio emerge in modo essenziale il problema di un'influenza sulle precise condizioni che definiscono i possibili tipi di predizioni che riguardano il comportamento successivo del sistema... il loro argomentare non giustifica la loro conclusione che la descrizione quantistica risulti essenzialmente incompleta... Questa descrizione può caratterizzarsi come una utilizzazione razionale di tutte le possibilità di una interpretazione non ambigua del processo di misura compatibile con l'interazione finita e incontrollabile tra l'oggetto e lo strumento di misura nel contesto della teoria quantistica"

Il brano di cui sopra sembra sinceramente incomprensibile, come sottolineato anche da J. Bell.

M. Born: "La radice delle differenze tra Einstein e me era l'assioma che eventi che si verificano in posti diversi **A** e **B** sono indipendenti uno dall'altro, nel senso che una osservazione circa la situazione in **B** non può dirci nulla circa la situazione in **A**."

Sembra proprio che Born non abbia colto il punto essenziale dell'esperimento. Si veda l'esempio di due scatole chiuse con una pallina Bianca in una e una Nera nell'altra, supponendo che io non sappia in quale scatola si trova la pallina bianca, o quella nera. Supponiamo ancora, come l'EPR, di portare le scatole molto lontano, di aprirne una e di guardare il colore della pallina (bianca p.e.). Istantaneamente potremo dire che la pallina nell'altra scatola è nera – anche senza dover aprire la scatola. Ma questo è il tipico caso di eventi – classici – ma dipendenti uno dall'altro, anche se si verificano in posti differenti.

K. R. Popper 1: a pagina 137 del libro *La teoria quantistica e lo scisma nella fisica* discute l'interpretazione di Copenaghen della riduzione del pacchetto d'onda.

"Senza dubbio la riduzione del pacchetto può verificarsi molto rapidamente; persino a velocità superluminale (cioè maggiore di quella della luce, n.d.a.), come ho spiegato nella sezione 75 della *Logica della Scoperta Scientifica*; perché esso semplicemente non è un evento fisico - è il risultato della libera scelta di nuove condizioni iniziali"

Cosa vuol dire l'affermazione sulle condizioni iniziali?

K. R. Popper 2: Vari anni dopo Popper scrive una prefazione al libro di cui sopra, manifestando ancora una volta di non aver colto alcuni punti essenziali di questo tipo di esperimenti. Infatti a pag.

27 del libro di cui stiamo parlando Popper propone un esperimento che costituisce una variante di quello di EPR e asserisce che *se l'interpretazione di Copenaghen risulta corretta*, allora l'esperimento da lui analizzato permette di inviare segnali superluminali. Popper presentò il suo gedankenexperiment ad una conferenza del 1983 al Centro di Fisica Teorica di Trento. L'esperimento, secondo lui, lasciava solo due alternative: o l'interpretazione di Copenaghen era corretta e allora ricorrendo al suo dispositivo sperimentale sarebbe risultato possibile inviare segnali superluminali, oppure non ci sarebbe stata azione istantanea a distanza e l'esperimento avrebbe costituito una falsificazione della teoria. In quell'occasione G. C. Ghirardi mostrò che Popper non aveva applicato correttamente le regole della teoria, i risultati quindi erano errati (Ghirardi, Un'occhiata alle carte di Dio, 2015, p. 167).

A. Pais: (Pais, Sottile è il signore, 1986) "Si è a volte parlato del contenuto dell'articolo come del paradosso di Einstein, Podolsky e Rosen. Andrebbe sottolineato che questa memoria non mette in evidenza né paradossi né difetti logici. Semplicemente essa conclude che il concetto di realtà oggettiva è incompatibile con l'ipotesi che la meccanica quantistica sia completa. Tale conclusione non ha inciso sugli sviluppi successivi della fisica ed è dubbio che lo farà mai." (!!!)

L'EPR è uno degli articoli del XX secolo che ha avuto maggiori influenze nella discussione e nella comprensione della realtà e della sua descrizione tramite la MQ. Il solo fatto che, come vedremo nel §7.6, le "soluzioni" teoriche al problema siano arrivate nel 1964 e le relative conferme sperimentali nel 1982, mostra quanto il problema non fosse ovvio né banale.

A. Einstein: (Ghirardi, 2015, p. 172) "Se si suppone che gli sforzi per elaborare una descrizione fisica completa abbiano successo, la teoria quantistica statistica verrebbe ad assumere, nello schema della fisica del futuro, una posizione approssimativamente analoga a quella della meccanica statistica nello schema della fisica classica. Io sono fermamente convinto che lo sviluppo della fisica teorica sarà di questo tipo; ma il cammino sarà lungo e difficile. Io sono, di fatto, fermamente convinto che il carattere essenzialmente statistico della teoria quantistica contemporanea è esclusivamente da ascrivere al fatto che questa (teoria) opera con una descrizione incompleta dei sistemi fisici".

A. Einstein, la frase conclusiva dell'articolo EPR (Einstein, Podolski, & Rosen, 1935): "Mentre noi abbiamo mostrato che la funzione d'onda non fornisce una descrizione completa della realtà fisica, abbiamo lasciato aperta la questione se una descrizione siffatta esista o no. Tuttavia noi crediamo che una teoria di questo genere sia possibile".

7.6. Le disuguaglianze di Bell

Nel 1964 J. S. Bell (1928-1990), un fisico irlandese, scrisse un articolo (Bell, 1964) sul paradosso EPR. L'articolo è la proposta di un esperimento mentale su di un sistema molto simile all'apparato EPR, ma più flessibile e concettualmente completo.

Con il suo esperimento Bell non voleva direttamente falsificare o provare la MQ o altre teorie, a lui interessava solo poter eseguire un test sulla località dei fenomeni naturali. Un punto essenziale del suo articolo è che le leggi della MQ (o di qualunque altra teoria *fisica*) non vengono mai utilizzate nel corso dell'esperimento e dell'analisi dei suoi risultati. L'unica formula che viene utilizzata è quella relativa al calcolo della probabilità totale per eventi indipendenti.

Bell scrive delle disuguaglianze sperimentabili tali da dover essere verificate nel caso valga l'ipotesi di località. Queste previsioni possono essere quindi confrontate con le previsioni di qualunque altra teoria.

Questo paragrafo non è semplice. Daremo subito il risultato a cui arrivò Bell con i suoi calcoli ed A. Aspect (1947-) con le relative misure sperimentali (Aspect, Grangier, & Roger, 1982):

Il risultato sperimentale è quello previsto dalla meccanica quantistica, che quindi non è locale. L'argomentazione di EPR era giusta, ma non la conclusione, perché l'ipotesi di partenza non era vera:

non è la MQ ad essere incompleta, è l'ipotesi di località a dover essere cambiata. L'entanglement rende possibili correlazioni superluminali che risultano essere *unmediated, immediate, unmitigated* (non mediate, immediate, non mitigate). Ma non permette l'invio di segnali superluminali. La teoria della relatività non viene violata.

Ecco la discussione, semplificata, dell'esperimento mentale di Bell e delle misure che vennero eseguite da Aspect.

Nella parte che segue non vengono presentate le disuguaglianze di Bell proposte nel suo articolo originale del 1964, ne presenteremo una versione più semplice, anche se rigorosamente corretta.

Supponiamo di avere una sorgente che crea coppie fotoni entangled²⁵ B e G :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|B, \alpha\rangle \cdot |G, \alpha\rangle + |B, \alpha + 90^\circ\rangle \cdot |G, \alpha + 90^\circ\rangle]$$

dove α e $\alpha+90^\circ$ rappresentano due assi ortogonali qualunque riferiti alla grandezza misurabile "Polarizzazione" [cfr. il paragrafo § 7.5.4 sull'EPR: scomposizione di due fotoni entangled].

I due fotoni, che viaggiano in direzioni opposte, vengono inviati a due cristalli di calcite, ognuno con un asse di riferimento in direzione verticale: "V". Nota: si tratta ovviamente di una direzione convenzionale di riferimento non necessariamente coincidente con la "verticale" riferita alla superficie terrestre.

Il cristallo di calcite: un cristallo di calcite è lo strumento di analisi dei fotoni polarizzati che sostituisce i polarizzatori usati fino a questo momento. Vediamo come funziona.

Supponiamo di inviare un fotone ad un cristallo di calcite, caratterizzato da una direzione di riferimento V; dal cristallo esce *sempre* un fotone che, a seconda della polarizzazione, viene registrato come UP (polarizzazione Orizzontale) o come DOWN (polarizzazione Verticale) da due contatori di fotoni U & D.

Quindi nel caso del cristallo di calcite non si perdono metà dei fotoni come avveniva per un polarizzatore su cui venivano inviati fotoni entangled: in quel caso passava la metà dei fotoni mentre l'altra metà veniva assorbita, quindi spariva. In realtà non abbiamo modo di controllare cosa sia successo e come siano i fotoni che scompaiono. Questo fatto può creare dei problemi nell'analisi dell'esperimento.

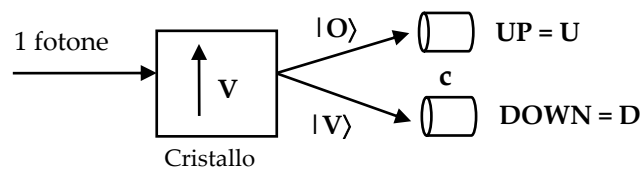


Fig. 7.19 lo schema di rivelazione utilizzato per ogni fotone per studiare le disuguaglianze di Bell. Ogni fotone che arriva sul cristallo di calcite ne esce in due direzioni possibili. Verso l'UP per la polarizzazione Orizzontale, o verso il DOWN per la polarizzazione Verticale; all'uscita dei due cammini si trovano poi due contatori c che misurano rispettivamente i conteggi U(Up) e i conteggi D(Down).

Le misure sono fatte inviando N coppie di fotoni entangled [B,G] ai cristalli, che partono ed arrivano una coppia per volta, e registrando le sequenze di U e D misurate da ogni contatore.

Lo scopo è di analizzare la statistica delle misure fatte su molte coppie di fotoni per ogni singola modalità di misura. Le configurazioni utilizzate in questo esperimento sono tre, con tre differenti configurazioni dei cristalli, cioè dei relativi angoli dell'asse di riferimento del cristallo rispetto alla verticale.

²⁵ Questo si può fare facilmente con un cristallo non-lineare, è un'operazione standard in un qualunque laboratorio di ottica quantistica. I nomi B e G per i due fotoni derivano dal fatto che i due fotoni entangled hanno frequenza diverse, tipicamente uno è Blu, l'altro è Verde (Green).

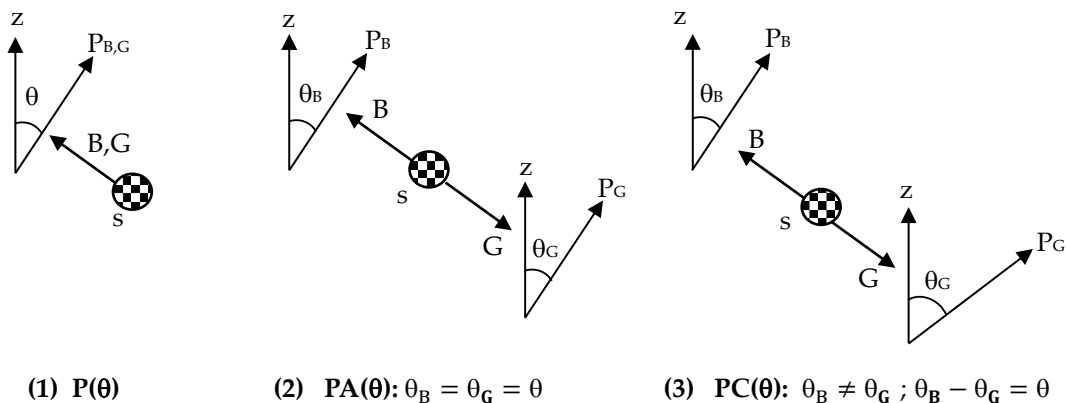


Fig. 7.20 s è la sorgente dei fotoni; B e G sono i due fotoni; z è un asse di riferimento (il laboratorio); $P_{B,G}$ è la direzione dell'asse dei cristalli che misurano rispettivamente il fotone B e il fotone G ; θ è l'angolo fatto da ogni cristallo con la direzione di riferimento z . Vengono fatte tre diverse serie di misure secondo le configurazioni (1) $P(\theta)$, (2) $PA(\theta)$ e (3) $PC(\theta)$. 1) $P(\theta)$ è la misura di polarizzazione fatta su uno dei due fotoni, il B o il G , con il cristallo ad un certo angolo θ . 2) $PA(\theta)$ è la "Polarizzazione Accoppiata" in cui gli angoli dei due polarizzatori sono uguali, $\theta_B = \theta_G = \theta$. 3) $PC(\theta)$ è la "polarizzazione correlata", cioè la correlazione della polarizzazione misurata sui due fotoni quando gli angoli dei due cristalli sono diversi fra di loro e dalla direzione di riferimento z : $\theta_B \neq \theta_G ; \theta \neq \theta_B - \theta_G$.

Ecco le tre misure che possono essere fatte, e un esempio di un risultato tipico dell'esperimento:

1) La Polarizzazione $P(\theta)$ per un singolo fotone B oppure G :

per qualsunque angolo θ ho il 50% di probabilità di avere U o D , una sequenza tipica sarà:

per B o per G : UUDUDUDUDDUDUDDDUUUDU ~ (50% U ; 50% D)

2) La "Polarizzazione Accoppiata" $PA(\theta)$ per la coppia di fotoni B,G :

$PA(\theta)$: l'angolo è uguale, è la stessa situazione dell'EPR, le sequenze dei risultati U e D sono casuali, ho sempre il 50% di probabilità di avere un U o un D , ma le due sequenze sono uguali.

Esempio:

B : UUDUDUDUDDUDUDDDUUUDU circa 50% U ; 50% D

G : UUDUDUDUDDUDUDDDUUUDU " "

3) La "Polarizzazione Correlata", la correlazione della Polarizzazione dei due fotoni:

$PC(\theta)$: gli angoli sono diversi, $\theta = \theta_G - \theta_B$. Le sequenze saranno diverse, per ogni conteggio abbiamo un Match (M) se il risultato è lo stesso, un Errore (E) se il risultato è diverso. Esempio:

B :	UUDU	DUDU	DDUD	UDDD	UUDU	N fotoni misurati
G :	UU <u>DD</u>	DU <u>DD</u>	D <u>U</u> UD	UDD <u>U</u>	U <u>DD</u> U	N fotoni misurati
Match:	MMM	MMM	M MM	MMM	M MM	$N_M =$ numero di $M=15$
Errori:		E	E	E	E E	$N_E =$ numero di $E=5$

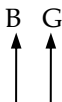



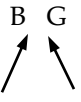
Quindi si conta la frequenza dei Match = $PC(\theta)$ e quella degli errori $E(\theta)$, come il numero di eventi relativi (N_M o N_E) diviso il numero di eventi(conteggi) totali N :

$$PC(\theta) = \frac{\text{Numero di Match}(\theta)}{\text{Numero totale di conteggi}} = \frac{N_M}{N} \quad ; \quad E(\theta) = \frac{\text{Numero di Errori}(\theta)}{\text{Numero totale di conteggi}} = \frac{N_E}{N}$$

Ecco i possibili risultati per alcuni angoli particolari:

1. $\theta = 0$ $PC(0) = 100\% = 1$ $E = 0\% = 0$ tutti i valori sono uguali, non ho errori.
2. $\theta = 90^\circ$ $PC(90^\circ) = 0\% = 0$ $E = 100\% = 1$ tutti i valori sono diversi, ho il 100% di errori.
3. Per gli angoli fra 0° e 90° E assumerà dei valori intermedi fra 0 e 1: **scelgo sperimentalmente l'angolo θ per cui $E=1/4$** (1 errore ogni 4 fotoni). Si trova che $\theta=30^\circ$. Notiamo che la scelta è puramente sperimentale, non ho ipotizzato nessuna teoria per prevedere l'angolo per cui $E=1/4$.

Ed ecco la sequenza delle quattro misure della correlazione fra i due fotoni che porteranno alle poi alla misura di Bell:

Direzione Cristalli	θ_B	θ_G	$\theta = \theta_G - \theta_B$	PC	E	
G e B allineati con z:	$\theta_B = 0$	$\theta_G = 0$	$\theta = 0$	$\rightarrow PC=1$	$E=0$	
G non allineato:	$\theta_B = 0$	$\theta_G = 30^\circ$	$\theta = 30^\circ$	$\rightarrow PC=3/4$	$E=1/4$	
G e B allineati con z:	$\theta_B = 0$	$\theta_G = 0$	$\theta = 0$	$\rightarrow PC=1$	$E=0$	
G non allineato:	$\theta_B = 0$	$\theta_G = -30^\circ$	$\theta = -30^\circ$	$\rightarrow PC=3/4$	$E=1/4$	
La misura di Bell:						
B e G non allineati:	$\theta_B = 30^\circ$	$\theta_G = -30^\circ$	$\theta = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$	$\rightarrow PC=?$	$E=?$	

La misura di Bell: **se vale la località** allora ruotare uno dei due cristalli non può influire sul risultato dell'altro perché le misure sono praticamente istantanee e non ci può essere una influenza istantanea a distanza (località). Quindi i risultati della misura dei due contatori sono eventi casuali indipendenti, la cui probabilità di accadimento congiunto è semplicemente la somma delle due probabilità singole. Quindi gli "Errori" (come i Match) totali, rispetto alla sequenza "giusta", cioè quella che si avrebbe per $\theta = 0$, devono essere la somma degli Errori misurati da ogni singolo [cristallo + contatore].

Quindi $E(\theta = 60^\circ) = 2 \cdot E(\theta = 30^\circ) = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 50\%$: dovrei avere, in media il 50% di errori.

Tuttavia, nella sequenza, potrebbero esserci due errori nella stessa posizione, che darebbero un risultato giusto, ad esempio:

Sequenza "giusta": UUDU DUDU DDUD

B: UDDU DUDD DDD (3 errori nella sequenza B)

G: UUDD DUDD DUUD (3 errori nella sequenza G)

Errori fra B e G: E E EE (4 errori totali < 3 + 3)

Quindi il numero degli errori totali sarà **minore o uguale** a quello del massimo teorico ($1/2$).

La disuguaglianza di Bell afferma che, se vale la località, il numero di errori E (per $\theta=60^\circ$) deve essere appunto $\leq 1/2$

La previsione della disuguaglianza di Bell: $E(\text{località}|60^\circ) \leq 1/2 = 0,5 = 50\%$

La previsione della Meccanica Quantistica²⁶: $E(\text{QM, teoria}|60^\circ) = \sin^2 \theta = 3/4 = 0,75 = 75\%$

È importante sottolineare ancora una volta che il risultato della disuguaglianza di Bell ($E \leq 50\%$) è stato calcolato utilizzando solo la definizione di probabilità, non è stata ipotizzata alcuna legge fisica, a parte la località degli eventi naturali. Quindi è solo ed esclusivamente un test di località.

La previsione della Meccanica quantistica viene fatta, ovviamente, utilizzando le leggi della MQ.

Le due previsioni sono molto diverse: qualunque teoria locale dovrà dare un valore di $E < 50\%$. La MQ prevede che $E = 75\%$. Quindi se ne deduce che la MQ non è una teoria locale, resta da vedere l'esperimento reale quale risultato darà.

Le misure su di un apparato che riproduceva l'esperimento mentale proposto da Bell, sono state fatte negli anni 1981 (A. Aspect, Dalibard, & Roger, 1981) e seguenti da A. Aspect e collaboratori.

Le differenze con la proposta di Bell erano essenzialmente due: la prima riguarda il *numero* vero e proprio delle previsioni teoriche. Le misure infatti furono eseguite con contatori che avevano un'efficienza $e < 1$, cioè non tutti i fotoni che arrivavano ai contatori venivano contati. In questo caso si possono fare i calcoli delle disuguaglianze di Bell inserendo l'efficienza dei contatori.

La seconda differenza, concettualmente molto importante, era questa: gli angoli dei cristalli venivano ruotati mentre i fotoni erano in volo, giusto prima della misura. E il comando di quanto ruotare l'angolo di ogni polarizzatore veniva generato al momento utilizzando una sequenza di numeri casuali creata al momento e sconosciuta anche agli sperimentali. Questo per evitare una possibile obiezione sul fatto che tutto l'universo sia in uno stato interlacciato²⁷, in cui quindi il porre gli angoli dei polarizzatori secondo determinate direzioni *prima che iniziasse l'esperimento* avrebbe potuto influenzare tutto l'universo, anche i fotoni che partivano, imponendo una scelta dei risultati sperimentali. Questa visione non corrisponde a nessuna teoria esistente. Da questi esperimenti vanno escluse tutte le possibilità, anche in riferimento a situazioni non conosciute o improbabili.

Il risultato sperimentale: $E = 0,601 \pm 0,020$ (A. Aspect 1982)

La previsione della MQ: $E = 0,612$ (calcolata per un'efficienza < 1)

²⁶ La probabilità che un fotone passi attraverso un polarizzatore che fa un angolo θ con il fotone è $P(\theta) = \cos^2 \theta$ [Legge di Malus].

²⁷ Le visioni di un mondo olistico in alcune discipline spirituali.

A. Aspect 1982 - Test sulle disuguaglianze di Bell

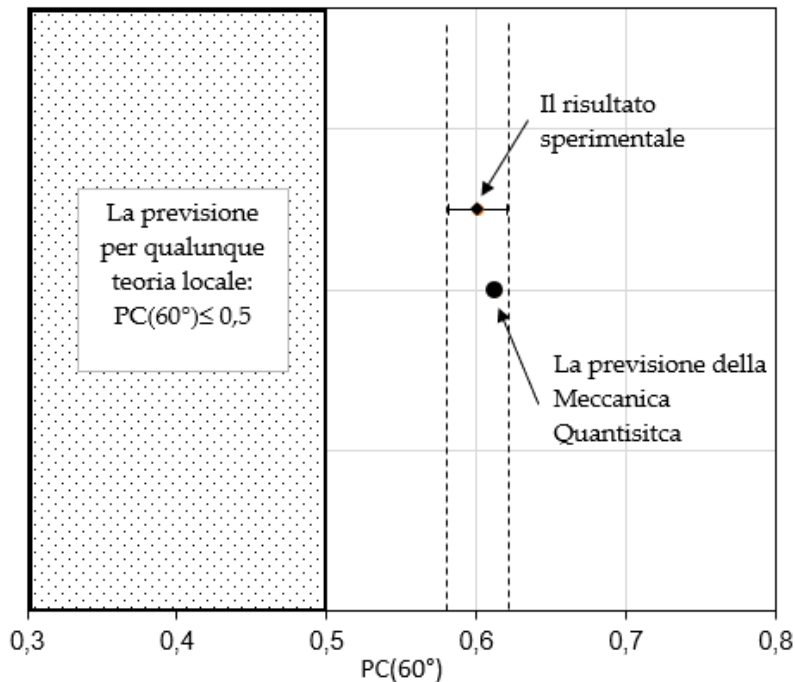


Fig. 7.21 I risultati sperimentali e le previsioni teoriche dell'esperimento di Aspect sulla località della realtà. La località della realtà è falsificata. La previsione della Meccanica Quantistica conferma, entro le incertezze, il risultato sperimentale.

Ulteriori misure (Weihs, 1998):

Misura fatta utilizzando un set intero di disuguaglianze di Bell (2 coppie di valori degli angoli dei due polarizzatori $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$):

Ipotesi di località (la disuguaglianza di Bell)	$S(\text{località}) \leq 2$
Previsione Meccanica quantistica	$S(\text{QM})_{\text{teoria}} = 2\sqrt{2} = 2,82$
Misura	$S(\text{esperimento}) = 2,73 \pm 0,02$

L'efficienza era ancora molto bassa (5%), i puristi non la ritenevano una prova definitiva, le misure sono state ripetute nel corso degli anni con efficienze molto più alte confermando i risultati precedenti che oramai vengono universalmente accettati come validi.

Conclusione 1. L'ipotesi di località è falsificata: la realtà, in determinate condizioni, può essere non locale. Possono esistere interazioni non-locali, cioè con una correlazione immediata anche a grandi distanze, ma solo per sistemi quantistici entangled (interlacciati).

Conclusione 2. Il risultato sperimentale è quello previsto dalla meccanica quantistica, che quindi non è locale. L'argomentazione di EPR era giusta, ma non la conclusione, perché l'ipotesi di partenza non era vera: non è la MQ ad essere incompleta, è l'ipotesi di località a dover essere cambiata. L'entanglement rende possibili correlazioni superluminali che risultano essere *unmediated, immediate, unmitigated* (non mediate, immediate, non mitigate). Ma non permette l'invio di **segnali** superluminali. La teoria della relatività non viene violata: l'osservatore in B non ha modo di accorgersi delle azioni di G; i conteggi di G sono determinati dal caso, saranno sempre sequenze casuali su cui non si può avere

nessun controllo. Analogamente, la statistica dei conteggi di B sarà sempre un 50% U e un 50% D e B non potrà estrarre da questa sequenza nessuna informazione, anche se fosse identica a quella di G.

7.7. La vita di un sistema quantistico interlacciato

A questo punto qualcuno potrebbe chiedersi: ma allora è vero che esistono sistemi collegati fra loro, magari in altri paesi, o pianeti o galassie. E forse tutti gli esseri umani sono collegati da questi invisibili legami dati dall'entanglement... Molti ciarlatani fanno affermazioni di questo genere, affermazioni che spesso si trovano in rete, su pubblicazioni varie, come argomenti di conferenze (ovviamente a pagamento). Per un'ottima trattazione non specialistica di questi punti cfr. "Il mondo quantistico. Errate interpretazioni, teorie improbabili e bufale quantiche". (Gazzola, 2017). Va chiarito che la possibilità che esistano oggetti macroscopici o addirittura esseri viventi in uno stato entangled, quindi interlacciati tra loro è praticamente impossibile. Vediamo perché.

Uno stato interlacciato rimane nello stato interlacciato fin quando non viene effettuata una misura su di esso, in particolare una misura che potrebbe rivelare la grandezza interlacciata. Negli esempi che abbiamo fatto fino ad ora i due fotoni smettevano di essere due fotoni entangled qualche istante dopo la misura di uno dei due. Nell'istante immediatamente successivo si poteva misurare il secondo fotone e verificare le eventuali correlazioni, ma l'evoluzione temporale dei due da quel punto in poi diventava un'evoluzione libera, quella di due particelle indipendenti, senza nessun legame fra loro.

Ora il fatto è che due fotoni sono un oggetto molto particolare. Possiamo creare dei fotoni con certe caratteristiche ed inviarli su di una fibra ottica per centinaia di chilometri senza che cambino sensibilmente il loro stato. È il caso di ricordarsi che un fotone per fare il giro della Terra in una fibra ottica ci mette qualche centinaio di millisecondi, quindi un fotone che mantenesse le sue proprietà di interlacciamento anche solo per un secondo avrebbe modo di fare in questo tempo varie volte il giro della Terra.

Il problema è di mantenere quella che si chiama la *coerenza* di un sistema interlacciato. Cioè quanto tempo *vive* un sistema interlacciato messo in contatto con l'ambiente. E questo è il grosso problema per un oggetto macroscopico. Un oggetto macroscopico infatti è sempre in contatto con l'ambiente, sulla Terra intorno ai 20 °C, cioè circa 293 K. Questo contatto termico, che avviene con un continuo scambio di energia fra il corpo ed il mondo esterno, consiste in uno scambio di pacchetti di energia su tempo molto brevi, tipicamente miliardesimi o milionesimi di secondo (sono giusto ordini di grandezza).

Ma ogni scambio di energia è un'interazione con l'ambiente esterno, quindi è una *misura* dello stato del sistema. In pratica ogni oggetto macroscopico interagisce, quindi è come se venisse osservato, su tempi brevissimi ed in continuità dall'ambiente esterno. Ed è sufficiente la prima di questi miliardi di interazioni a distruggere lo stato di interlacciamento che avesse il sistema.

Ricordiamoci che lo stato interlacciato è uno stato quantistico molto "delicato". Serve molto poco a distruggerlo. Quindi è impensabile avere sistemi interlacciati macroscopici, tanto meno a temperatura ambiente.

Il problema di mantenere *in vita* uno stato interlacciato è analogo al problema di mantenere uno stato quantistico prima che questo possa diventare classico. Con questo si intende quando un sistema di moltissime particelle, tutte descritte da funzioni d'onda che hanno relazioni di fase ben precise e fisse tra di loro, diventano, in seguito a molteplici interazioni, un insieme di particelle descritte da funzioni d'onda senza alcuna relazione reciproca. Il sistema è *classico* ed ha perso alcune delle caratteristiche peculiari di un sistema quantistico: non potrà più essere uno stato interlacciato, non potrà avere fenomeni di tunneling, non potrà manifestare fenomeni di interferenza con altri sistemi quantistici...

Per dare un'idea di quanto sia difficile mantenere in uno stato coerente un sistema macroscopico vorremmo mostrare una misura fatta da uno degli autori [cc] su di un sistema particolare (Poletto, 2009).

In fig. 7.22 si può vedere la misura del tempo di decoerenza di un sistema quantistico macroscopico in contatto con l'ambiente. Si tratta di un sistema molto piccolo (le dimensioni sono inferiori al millimetro), molto freddo (si tratta di un sistema raffreddato a circa - 273 °C). Il sistema quantistico misurato è un qu-bit, cioè un bit quantistico, che oscilla fra gli stati 0 e 1. Nella figura si vede

un'oscillazione che rappresenta il continuo passaggio del qubit da uno stato quantistico (1) ad un altro stato quantistico (0). Quando l'oscillazione finisce vuol dire che l'oggetto non si comporta più come un oggetto quantistico, ma è diventato un bit classico che si può trovare solo negli stati 0 oppure 1.

Si può vedere come lo stato quantistico coerente duri pochi miliardesimi di secondo.

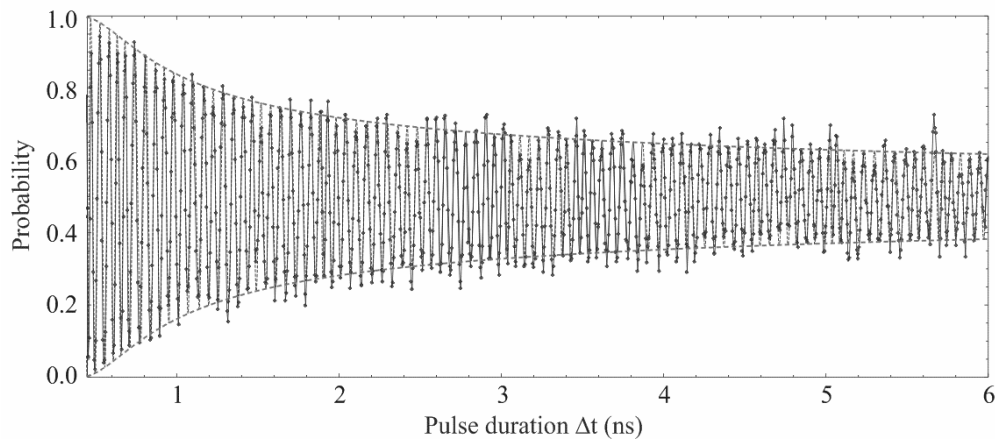


Fig. 7.22 Misura del tempo di decoerenza in un sistema quantistico macroscopico in contatto con l'ambiente. L'oggetto in esame è un dispositivo superconduttore delle dimensioni di circa pochi micron (10^{-6} m) raffreddato alla temperatura di circa $0,05$ K \cong -273 °C. L'ampiezza dell'oscillazione mostra quanto il sistema sia *quantistico*. Quando l'oscillazione è fra 0 e 1 (al tempo $\Delta t = 0$) il sistema è completamente quantistico. Man mano che passa il tempo l'oscillazione si attenua, quando il valor medio sarà arrivato a 0,5 il sistema sarà completamente *classico*. Si può vedere come questo sistema, molto piccolo e molto freddo, ha uno stato quantistico che dura pochi ns, quindi pochi miliardesimi di secondo (Poletto, 2009).

Quindi, per concludere questo breve paragrafo, verremmo sottolineare ancora una volta che un sistema quantistico che presenti comportamenti quantistici è un oggetto tipicamente piccolo, molto piccolo. Sistemi macroscopici con comportamenti quantistici si possono avere se raffreddati a temperature alle quali l'agitazione termica diventa trascurabile, quindi vicino allo zero assoluto. Sistemi quantistici macroscopici, veramente macroscopici, a temperatura ambiente al momento non sono stati visti e sembra difficile che possano esistere. Potrebbero esistere tuttavia fenomeni brevissimi, su scale microscopiche che presentano fenomeni di coerenza quantistica o addirittura di interlacciamento. In particolare ci sono seri studi ed alcune evidenze su fenomeni quantistici di questo tipo in sistemi biologici, quindi a temperatura ambiente. Per una recente rassegna vedi l'ottimo testo "la Fisica della vita" (Al-Khalili & McFadden, 2015).

7.8. La non-località oggi. La crittografia quantistica

La non-località, cioè la correlazione di particelle interlacciate, può essere utilizzata per trasmettere messaggi cifrati sicuri tramite l'invio di fotoni opportunamente preparati.

Il problema nella trasmissione di messaggi cifrati è di trovare una chiave che codifica il messaggio da trasmettere che non possa essere intercettata e quindi decifrata. Il fatto è che, dato un messaggio cifrato, sarà quasi sempre possibile decifrarlo con opportuni algoritmi che operano sul messaggio; sarà solo una questione di tempo e di potenza di calcolo. L'unica soluzione è di impedire fisicamente ad un osservatore esterno di accedere al messaggio da decifrare e/o alla chiave. Questo si può fare se la chiave è una sequenza di U e D misurata su due fotoni entangled. L'operazione non è così semplice, è necessaria in ogni caso una comunicazione successiva fra chi invia il messaggio e chi lo riceve. Questa

comunicazione, essendo una trasmissione di informazione, verrà fatta con segnali standard che vanno quindi alla velocità della luce, ma il cuore di questa tecnica di cifratura sta nell'utilizzo delle correlazioni fra coppie di fotoni entangled: questa sequenza è intrinsecamente *sicura*. Il protocollo prevede che in un luogo vengano create delle coppie di fotoni entangled uno dei quali viene inviato a chi deve ricevere il messaggio, mentre l'altro rimane a chi deve inviare il messaggio. Lo stato di interlacciamento fra i due fotoni sparisce appena uno dei due viene "osservato" o intercettato, a causa del collasso della funzione d'onda. Un eventuale «osservatore» esterno che intercettasse la sequenza trasmessa – anche ritrasmettendola - provocherebbe il collasso dello stato quantistico, le correlazioni andrebbero perse, e chi doveva ricevere il messaggio se ne accorgerebbe. Quindi la tecnica, semplificando, è di inviare molte coppie di fotoni, effettuare una misura di polarizzazione con alcune modalità particolari riguardo alla direzione dei polarizzatori – sia chi invia che chi riceve – e scrivere la sequenza ottenuta. Scambiarsi alcune informazioni sulla sequenza misurata, verificare che il messaggio interlacciato non sia stato intercettato, ed utilizzare quindi la sequenza per cifrare il messaggio.

Questa tecnica viene utilizzata senza problemi per transazioni sicure - transazioni finanziarie, fra enti governativi, dati sensibili-. I fotoni possono viaggiare con la fibra ottica dei segnali telefonici ad alta velocità senza perdere le loro proprietà e può essere trasmesso a un centinaio di chilometri (per ora). Gli apparati per la cifratura tramite fotoni interlacciati sono venduti liberamente e possono essere acquistati, anche se non sono proprio economici.

7.9. Il teorema di Noether

Vorremmo concludere questo capitolo con un Teorema. Può sembrare strano che dopo qualche centinaio di pagine in cui si è parlato solo di principi o di leggi sperimentali si arrivi ora a parlare di un Teorema. Eppure il Teorema di Noether è uno dei più affascinanti teoremi che coinvolgono le nostre conoscenze e vale la pena di parlarne.

Emmy (Amalie) Noether (1882-1935), donna ed ebrea tedesca, non ebbe una vita facile. Prima le fu impedito di iscriversi ad una scuola per prepararsi all'esame di Maturità. Nel 1900 in Germania e in Austria l'educazione formale delle donne finiva all'età di 14 anni e la loro iscrizione regolare all'Università era del tutto fuori questione (Bonolis, 2010). Per anni insegnò all'Università, prima di nascosto e poi gratuitamente: come donna, secondo alcuni accademici, non poteva avere la qualifica di Professore. Poi il nazismo le vietò l'insegnamento, essendo ebrea, emigrò quindi negli Stati Uniti dove morì a 53 anni in seguito ad un'operazione chirurgica. Il Teorema che porta il suo nome, scritto in forma matematica, è incomprensibile per chi non sia padrone del linguaggio fisico-matematico. Proviamo a leggerne l'enunciato:

Teorema di Noether

A ogni simmetria della Lagrangiana, ovvero a ogni trasformazione continua delle coordinate generalizzate q_i e \dot{q}_i e, eventualmente, del tempo t , che lascia inalterata la Lagrangiana $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$, corrisponde una quantità conservata.

Ecco la "traduzione" di questo teorema in un linguaggio semplificato, più comprensibile ai non addetti ai lavori:

Teorema di Noether - bis

Ad ogni grandezza fisica non osservabile corrisponde una simmetria nella descrizione dell'universo. Questa simmetria implica la conservazione di un'altra grandezza fisica.

Il concetto di simmetria è, intuitivamente, abbastanza semplice. Una simmetria è legata ad un'operazione che, applicata ad un oggetto, ne lascia invariato l'aspetto. In geometria il significato è immediato: una sfera è simmetrica per qualunque angolo di rotazione intorno al suo centro. Un

quadrato è simmetrico per una rotazione di 90° e multipli di 90° ... e così via. Analogamente si hanno delle simmetrie per determinate grandezze fisiche: per esempio la distanza fra due punti (cfr. il primo caso nella tabella 7.7): la distanza fra Firenze e Bologna lungo l'autostrada A1 è indipendente da dove abbia posto l'origine e cominciato a contare i chilometri: questa distanza vale sempre circa 106 km.

Ecco in tabella alcune corrispondenze.

Grandezza non osservabile	Simmetria	Legge di conservazione
Posizione spaziale assoluta	Traslazione nello spazio	Quantità di moto
Tempo assoluto	Traslazione nel tempo	Energia
Direzione spaziale assoluta	Rotazione nello spazio	Momento angolare

Tab. 7.7 Alcune relazioni fra grandezze non osservabili, la simmetria risultante e la legge di conservazione che ne consegue secondo il Teorema di Noether.

Il significato del Teorema di Noether è questo: consideriamo una grandezza fisica, la prima della tabella: la posizione nello spazio. La posizione assoluta nello spazio non è una grandezza osservabile. Possiamo definire e misurare solo una posizione relativa all'origine di un certo SdR. Ma non esiste un SdR assoluto, per cui possiamo dare un'origine definita per le coordinate. Questa impossibilità di individuare l'origine assoluta dello spazio corrisponde ad una simmetria fondamentale: quella delle traslazioni nello spazio (se non esistesse questa simmetria potremmo individuare un sistema di riferimento privilegiato). A questa simmetria corrisponde, dato il formalismo utilizzato per descrivere le leggi della Fisica classica, la conservazione della grandezza fisica "quantità di moto", cioè il prodotto della massa m per la velocità \vec{v} .

È importante sottolineare che la grandezza finale che si conserva non è quella iniziale non osservabile, per esempio alla non osservabilità del tempo assoluto corrisponde la conservazione dell'Energia. Le tre grandezze scritte nella Tab 7.7 sono solo le prime, all'elenco si sono poi aggiunte altre grandezze della meccanica classica, relativistica o quantistica.

Il teorema di Noether, insieme al principio di indeterminazione di Heisenberg, hanno qualcosa in comune: entrambi riguardano coppie di grandezze fisiche. Il principio di Indeterminazione si scrive per coppie di grandezze che hanno un limite nella precisione con cui ne possiamo parlare, quindi rappresenta un limite alla conoscenza intrinseca e contemporanea di coppie di grandezze fisiche. Il Teorema di Noether, partendo sempre dalla mancanza di conoscenza di una certa grandezza, stabilisce invece una legge di conservazione per una grandezza completamente differente. Sono, in parte, opposte e complementari.